

钢筋混凝土框架的非线性分析

第 2 期中国抗震建筑研修

2010 年 6 月 10 日(星期四)13:30-16:00 独立行政法人建筑研究所

东京大学名誉教授 小谷俊介

本文主要对因构件弯矩而变形的钢筋混凝土建筑物的非线性地震反应分析方法予以解说。本文所解说的分析方法远非完善，还存在诸多问题。此次授课的主要目的便在于指出这些问题。钢筋混凝土建筑物的变形并不限于因弯矩导致的变形，但那些剪断破坏、沿主钢筋的粘着割裂破坏、以及从主钢筋固定区域脱落所致的固定破坏等皆显示出脆性破坏性状，而抗震结构设计在设计过程中是防止出现此类破坏形式的。因此，就建筑物的非线性地震反应而言，只需考虑弯曲性能即可。

虽然一般认为钢筋混凝土技术已经比较完善了，但在结构设计至施工的质量管理等方面仍存在许多技术问题。本文亦将同时指出这些问题。

1. 建筑混凝土断面的弯曲分析

(1) 平面假设

平面假设，意思是在受到弯矩的钢筋混凝土断面的分析（弯曲分析）中假设平面是保持的，即“变形前为平面的断面在变形后仍维持平面”。在这种基本假设下，材料特性并不限于线性弹性的范围，在显示弹塑性性状的弯曲分析中亦可使用。在弯曲变形起支配作用的钢筋混凝土构件实验中，通过贴于混凝土表面及钢筋上的应变计的观测值便可确认该假设基本妥当。

如果平面假设成立，则断面直角方向的应变与从中立轴算起的距离成比例关系，断面的应变分布的梯度为弯曲变形的曲率（构件旋转角的构件长度方向的微分）。断面的中立轴位置可以通过“断面内的应变分布和材料的应力度—应变关系确定的垂直应力度对断面进行积分所得的构件方向的轴力与作用于构件上的轴力相等”的条件确定。材料特性若属线性弹性，中立轴则穿过将钢筋置换于等价混凝土断面的等价断面的重心位置。

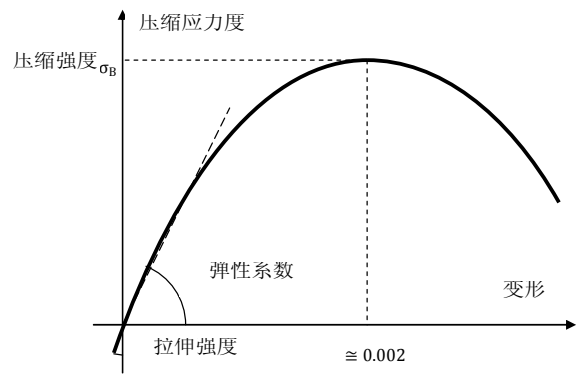
在平面假设中，从中立轴算起的距离是相等的，钢筋和混凝土的应变也是相等的，所以假设完全的粘着状态。对于粗短构件之类剪断变形成分较大的构件、以及钢筋和混凝土之间粘着不牢的构件等，由于平面假设有时无法成立，所以不能仅用弯曲分析的方法表现构件的性能。此种情形下，必须考虑因剪断变形或钢筋脱落等导致的附加变形。

(2) 混凝土的应力度 - 应变关系

混凝土是将水泥、砂、骨材及水正确调配搅拌，倒入任意形状和尺寸的模板后固化的建筑材料。混凝土的压缩强度，是通过圆柱形或立方试样静态试验确定的。压缩强度受以下因素影响：(1)混凝土的调配、(2)试验时的材龄、(3)试样的养护方法、(4)试样的形状和大小、(5)施荷速度。调配过程中，水和水泥的比例是决定混凝土强度的主要原因。

普通建筑物所用混凝土的压缩强度在 20—60 MPa 这一范围内。高强度混凝土用于(a)负担较大轴力的建筑物底部的柱、(b)使用高强度预应力钢材的预应力混凝土构件、(c)需要尽早去掉模板的预制混凝土构件。

就受单调增加之压缩应力度的混凝土的应力度 - 应变关系而言, 虽然施荷过程中随着混凝土内发生微小开裂而刚性逐渐降低, 但在应力度达到最大应力度 (压缩强度) 70%之前几乎接近直线。因此, 混凝土的弹性系数多以将压缩强度 1/3 点和原点连结起来的割线刚度来表示 (图 1.1)。发现压缩强度时的应变为 0.002 左右 (0.0015—0.003), 其后会显示出应力度降低的性状。混凝土的拉伸强度较小, 为压缩强度的 1/10 左右。



混凝土的应力度 - 应变关系随着混凝土的压缩强度而变化, 初期刚性随着压缩强度而变大, 但在达到压缩强度之后, 下降的梯度较大 (图 1.2)。但是, 达到压缩强度之时的应变没有多大变化。因此, 使用高强度混凝土时, 需要注意确保达到压缩强度之后的韧性。

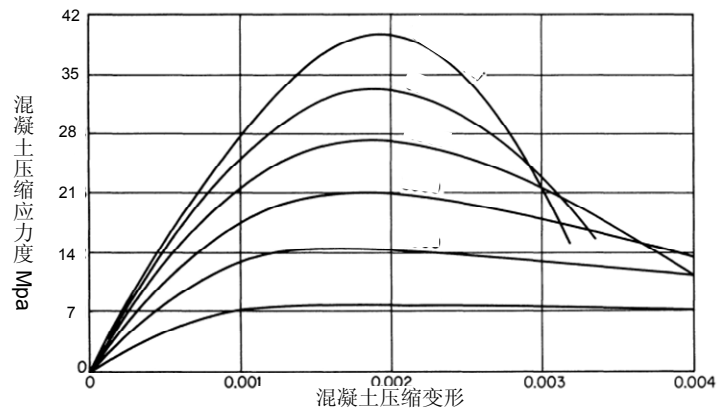


图 1.2: 混凝土强度和应力度 - 斜度关系

混凝土的弹性系数 E_c 多被用于美国混凝土学会所用的由 Pauw (1960) 提出的实验式。

$$E_c = 1.35 \gamma^{1.5} \sigma_B \text{ (GPa)}$$

此处, γ : 气干混凝土的单位容积质量 (单位: 1000 kg/m^3)、 σ_B : 压缩强度 (MPa)。注意: 该实验式具有较大偏差。

结构设计中指定的混凝土的设计用压缩强度, 不同于所建造物中的混凝土强度。实际情况是, 在设计阶段, 实际建造物中的混凝土弹性系数和强度不太清楚。如果不能在实际建造物中实现结构设计阶段预定的性能, 便会失去结构设计意义。当然, 对于保证混凝土设计强度等最低性能的混凝土的用料 / 调配、制造 / 搬运 / 装进、灌注 / 压实、养护等施工过程中的质量管理, 按照可靠的规格予以正确管理, 是很重要的。(社团法人日本建筑学会编、JASS-5)。

参考文献

Pauw, A., "Static Modulus of Elasticity of Concrete as Affected by Density," *Journal, American Concrete Institute*, No. 57, No. 6, December 1960, pp. 679-687.

社团法人日本建筑学会编:《建筑工程标准规格书及其解说、JASS-5 钢筋混凝土工程》2009 年版。

(3) 钢筋的材料特性

就受单调拉伸施荷的钢筋的应力度 - 应变关系而言, 在显示线性弹性、屈服台阶、应变硬化等性状后, 便会破断。钢材的弹性系数 E_s 约为 210 GPa, 泊松比约为 1/3。钢筋混凝土建筑物所用钢筋的强度大多在

300—500 MPa 这一范围内，但在主钢筋中，使用屈服点达 675—775 MPa 的高强度钢筋，在横向补强钢筋中，使用屈服点达 675—1200 MPa 的高强度钢筋。在预应力混凝土结构中，使用高强度预应力钢材。

普通钢筋混凝土结构所用钢筋属于屈服点较低的软钢筋，在屈服点之后有屈服台阶，自应变 0.02 左右开始出现应变硬化，达到拉伸强度之后，破断位置的断面变细，并在应变 0.20 左右破断。

由于高强度钢材或塑性加工钢材不显示屈服点和屈服台阶，所以将屈服点定义为经过残留应变 0.002 之点的、平行于弹性梯度所引的直线和应力度 - 应变关系的交点。随着强度的变大，钢材的屈服台阶变短，破断时的应变也变小，针对拉伸（破断）强度的屈服应力度之比（屈服比）接近 1.0。未在生产工程中正确实施质量管理的钢筋当中，有些产品仅以调整温度的方式实现高强度，有些产品在屈服后不经较大的塑性变形便会脆性破坏。因此，选择钢筋之际，研究其特性是很重要的。

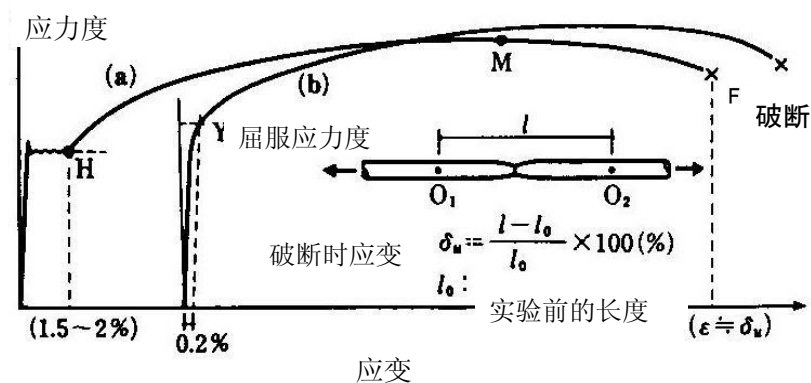


图 1.3: 受拉伸力的钢材的应力度 - 应变关系

就受压缩力的钢材的应力度 - 应变关系而言，如果不出现压曲现象，也会和受到拉伸时一样。

钢材的特点是，一旦施荷速度变大，便会显示出屈服点急速变大的性状，所以要注意爆炸之类短时间发生加力的情形。建筑物在地震时主要以固有周期振动，所以应变速率的影响较小。

在结构设计中，当然需要在结构图上正确标注主筋、横筋以及施工上所需钢筋的配筋。与此同时，对在作业现场按照结构设计图正确配筋予以确认的工程监理也是很重要的工作。此外，就配筋的详细情况而言，有些基于过去的地震灾害或可施工性等经验的方法是令人满意的，绘制结构图时应作充分参考（社团法人日本建筑学会：钢筋混凝土结构配筋指南及其解说、2003 年）。

参考文献

社团法人日本建筑学会：《钢筋混凝土结构配筋指南及其解说》2003 年 11 月。

(4) 钢筋混凝土断面的性能

钢筋混凝土的梁或柱的断面在受到弯矩时，最初显示线性弹性性能，梁的中立轴穿过包含钢筋的等价断面（将钢筋置换于等价混凝土断面的断面）的重心位置。在压缩轴力作用下的柱中，是根据从等价断面重心位置向断面平均作用的压缩应力度的大小向压缩侧移动的。与以断面的应变分布梯度表示的曲率相对的弯矩的初期刚性，是以混凝土弹性系数 E_c 和等价断面的断面二次矩 I_{co} 的乘积表示的。计算同平板混凝土一体化的梁的断面二次矩时，必须考虑平板的荷载分担宽度。除了影响梁刚性评价的平板荷载分担宽度之外，平板有效宽度内的钢筋有助于弯曲耐力。一般认为，平板的有效宽度随着梁弯曲屈服后的变形而

扩大。

(a) 开裂弯矩

一般认为，断面的拉伸缘的应力度一旦达到混凝土的拉伸强度，便会发生弯曲开裂。但是，要正确计算弯矩是很困难的，原因有：混凝土在干燥收缩时，混凝土的变形一旦被拘束便会产生拉伸应力度；断面的应力度是不同的，且有应力度梯度，所以在纯拉伸试验中确定的拉伸强度中不会发生开裂；等等。在柱及梁构件的实验中，根据对观察到弯曲开裂时的弯矩予以整理的实验式（菅野俊介、1970），开裂弯矩 M_{cr} 可以表示为：

$$M_{cr} = 0.56 \sqrt{\sigma_s} Z_e + \frac{ND}{6}$$

此处， σ_s ：混凝土的压缩强度， Z_e ：等价断面的断面系数（断面二次矩除以中立轴至拉伸缘的长度所得的值）， N ：柱的轴力， D ：断面的总高度。注意：该式子偏差很大。

可以如此思考，发生弯曲开裂时，受拉伸应力的混凝土不承担拉伸应力，拉伸力是由拉伸主筋负担的，断面的中立轴位置向压缩侧移动。换言之，如果忽略拉伸侧的混凝土，计算将主筋置换于等价混凝土的开裂等价断面的重心位置的断面二次矩 I_{cr} ，那么与开裂后曲率相对的弯矩的割线刚度可以用 $E_c I_{cr}$ 表示。

(b) 屈服弯矩

就拉伸钢筋屈服时的弯矩 M_y 而言，以拉伸钢筋位置的应变为钢筋的屈服应变，假定压缩缘的混凝土应变，评价根据该应变分布确定的混凝土及压缩侧钢筋的应力度，计算根据断面内应力度确定的轴力，与作用于断面的轴力相比较，反复运算直至 2 个轴力相等，确定正确的压缩缘混凝土应变。此时，如果压缩缘的混凝土应力度低于压缩强度的 70%，则可以用应变和弹性系数确定混凝土的应力度。

屈服弯矩会大幅影响拉伸钢筋断面面积、拉伸钢筋屈服强度以及从压缩缘至拉伸钢筋的断面有效高度，但对压缩钢筋、混凝土强度和断面宽度大小的影响不大。但是，使用与混凝土压缩强度相比屈服强度较大的拉伸钢筋时，混凝土会在拉伸钢筋屈服之前达到压缩强度从而开始破坏，所以要注意无法发挥拉伸钢筋屈服强度的情形。此外，使用未经充分质量管理的高强度钢筋时，可能会因较小的应变而破断，所以无法期待其作为钢筋混凝土构件的韧性。

如果假定压缩侧混凝土处于线性弹性范围，则屈服时的弯矩 M_y 可以近似表示为：

$$M_y = \frac{7}{8} a_t \sigma_y d$$

(c) 极限弯矩

如果在拉伸钢筋屈服之后继续施荷，则在压缩侧混凝土应力度达到压缩强度之后，弯曲耐力会因压坏而降低。

关于该极限弯矩 M_u 的值，最好是通过考虑了混凝土的应力度 - 应变关系的断面估算来得出。美国混凝土学会使用的方法是，将混凝土最大应变低于 0.003 左右时的应力度 - 应变关系置换于等价的长方形块中。即使令最大应变的大小大于 0.003，极限矩的大小也几乎不会发生变化，所以可以方便使用最大应变 0.003

这个值。(图 1.4)。

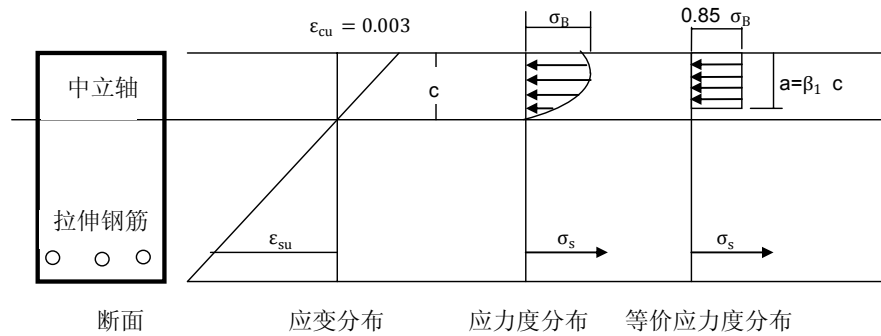


图 1.4：极限时的等价长方形应力度块

此处，在混凝土压缩强度低于 28 MPa 的情形下， $\beta_1 = 0.85$ ；在混凝土强度超过 28 MPa 的情形下，使 β_1 的值在混凝土强度每增加 7MPa 时，直线性递减 0.05。但是，没有必要使 β_1 的值低于 0.65。原因在于，在高强度混凝土中，应力度在最大耐力之后的降低是很显著的。

此外，极限时的曲率大小随着假定的混凝土应变而变化。在钢筋混凝土构件实验中，混凝土压坏时的应变会受到拘束压缩部分混凝土的钢筋量的影响，但有时应变也会超过 0.01。

计算极限矩时，将 0.003 作为断面压缩缘的应变，假定中立轴高度 c ，确定断面的应变分布，确定与此相应的拉伸 / 压缩钢筋的应力度和压缩区域的等价混凝土块的范围 a ，计算作用于断面的轴力，反复计算直至该轴力等于作用于断面的轴力。此时，比较方便的做法是，取用对横轴依据中立轴高度的大小计算的轴力和对纵轴依据断面应力分布计算的轴力，推定赋予正确轴力的中立轴高度。

支配极限弯矩的重要因素同屈服弯矩是一样的，亦是拉伸钢筋断面面积、拉伸钢筋屈服强度以及断面有效高度。但一旦使拉伸钢筋断面面积超过平衡钢筋断面面积（钢筋屈服时，压缩缘混凝土达到极限应变所需的拉伸钢筋断面面积），混凝土便会在钢筋屈服之前压缩破坏，从而无法发挥钢筋的屈服耐力，对此应予以注意。

(d) 单调施荷作用下的弯矩—曲率关系

受单调加荷的钢筋混凝土断面的弯矩和曲率的关系，大致可以用图 1.5 来表示。开裂前的初期刚性，可以用将钢筋断面面积置换为等价混凝土断面面积的等价断面的断面二次矩和混凝土的弹性系数的乘积来表示。注意，实际构造物的混凝土弹性系数不同于依据设计中假定的混凝土设计强度计算的值。关于开裂弯矩，如前所述，很难通过混凝土的设计（压缩）强度推定实际构造物的混凝土的拉伸强度，还存在混凝土的干燥收缩所导致的应变影响等。断面一旦发生弯曲开裂，混凝土负担的拉

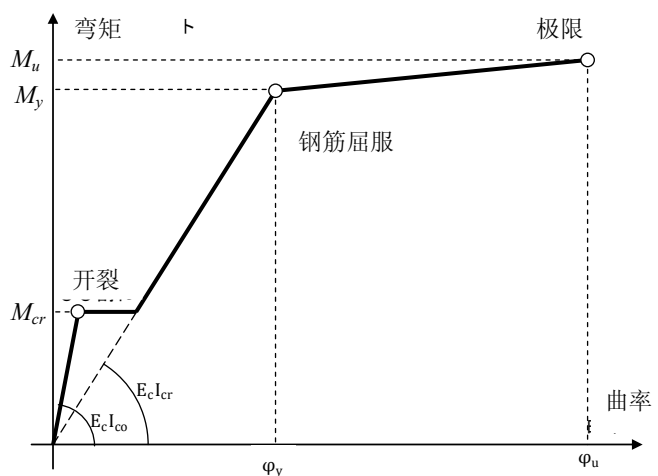


图 1.5：断面的弯矩—曲率关系

伸应力度便会解除，断面的中立轴向压缩侧移动，但由于钢筋及压缩混凝土处于线性弹性状态，所以只要将钢筋断面面积置换为等价混凝土断面面积，便可显示线性弹性的性能。拉伸钢筋的应变一旦达到屈服应变，刚性便会大幅降低，其后的弯矩增大不多。虽然可以计算极限矩，但极限时的应变使用的是妥当的值，所以很难正确预测极限时的曲率。

在受反复施荷的情形下，弯矩和曲率的关系会随着荷载迟滞而显示出复杂的性能。

正如此处所述，要正确预测实际钢筋混凝土构造物的构件断面的性能是极为困难的，对此应有充分认识。面对这种不确定性，最好在钢筋混凝土的结构设计中留下充分余地。

参考文献

菅野俊介：《关于钢筋混凝土构件恢复力特性的研究、东京大学学位论文》1970年12月。

2. 受垂直荷载和地震力的钢筋混凝土构件的弯矩

试着思考一下均匀分布垂直荷载和地震力在水平方向的均匀间距中作用于无限连接的框架时的梁的弯矩图。在无限连接的框架中，由于梁端部的旋转角为零，所以只需考虑垂直荷载或地震力作用于两端固定的梁构件的情形即可。

(1) 垂直荷载所产生的弯矩

均匀分布垂直荷载（长期荷载）产生的梁的剪断力如图 2.1 所示，梁的左端最大，中央为零，右端为负最大。由于弯矩图的梯度为剪断力，所以弯矩在构件左端形成上端拉伸（负弯矩），减少至抛物线状，构件中央的下端拉伸（正矩）最大，右端再次形成负弯矩。梁端部的弯矩大小，会受到拘束端部旋转的构件端刚性的影响，随着对旋转的拘束变小，端部弯矩的大小也会变小。例如，在梁两端弯矩导致上端产生开裂的情形下，由于梁端的旋转拘束因发生开裂而降低，所以端部弯矩变小。但是，由于弯矩分布的梯度依赖于剪断力分布，所以连接两端的弯矩分布的形状不发生变化，随着两端弯矩的大小而上下移动。关于构件内的曲率分布，只需对构件内各个点的弯矩依据弯矩曲率关系（图 1.4）确定曲率即可。

在无限连接的均匀间距的框架的柱中，不会产生弯矩。

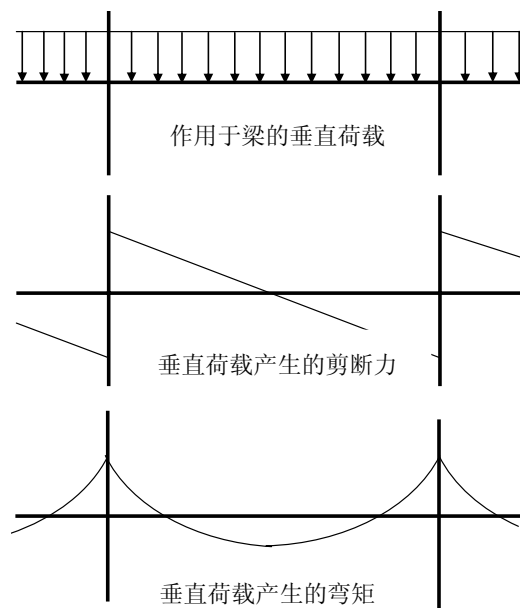


图 2.1: 垂直荷载所产生的梁的弯矩

(2) 地震力所产生的弯矩

关于地震力所产生的弯矩，不论是柱还是梁，构件内的剪断力是一样的，所以弯矩呈直线状变化，在构件端产生最大弯矩，并在构件中央产生弯矩的反曲点。构件一旦产生弯曲开裂，开裂便会由构件端部向构件中央部进展，但由于地震力是时时刻刻变化的，所以地震力变大时开裂范围扩大，地震力即使变小开裂也不会完全闭合。而且，由于地震力在正负之间反复，曲率会根据各个部位弯矩的迟滞而发生复杂的变化，所以很难分析变形状态。

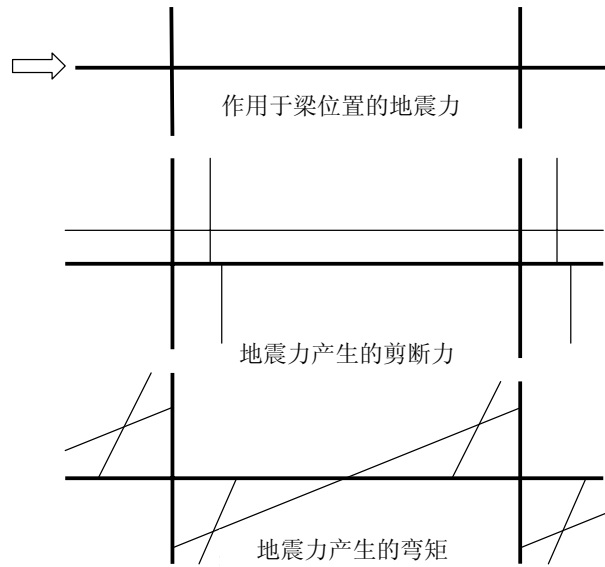


图 2.2 : 地震力所产生的梁的弯矩

(3) 垂直荷载和地震力所产生的弯矩

思考一下垂直荷载和地震力作用下的情形。地震动发生之前，仅有垂直荷载施加作用，所以构件的应力处于图 2.1 所示的状况，地震动一旦开始，由地震力逐渐产生的构件应力（图 2.2）便会一边变化振幅一边与垂直荷载时的应力相重合。如果地震力导致构件端产生开裂或弯曲屈服，端部的旋转拘束便会降低，所以垂直荷载所致弯矩的端部矩会变小，整个弯矩分布一边保持形状一边向下移动。

构造物发生的弯曲开裂的发生领域依赖于构件应力分布和开裂矩的大小，弯曲屈服铰链的发生是由构件应力较大的场所的弯矩和屈服弯矩的相对关系决定的。关于损伤分布，虽然不能一概而论，但在地震力较小时或者大间距框架的梁中，垂直荷载所产生的弯矩起支配作用，所以形成上端拉伸的构件端部会产生弯曲屈服，形成下端拉伸的构件端不会产生最大矩，进入构件内部时会产生最大矩。地震力较大时，在小间距框架的梁中，由于地震力产生的弯矩分布起支配作用，所以构件端部的弯矩会变大，弯曲屈服也会在梁端部发生。

在垂直荷载所致的弯矩起支配作用和地震力所致的弯矩起支配作用这两种情形下，构件内的损伤的分布状况是不同的。所以，在选择反应损伤分布状况的构件模型化方法时，应予以注意。

3. 钢筋混凝土非线性分析的特点

如果像钢筋混凝土的有限要素分析那样实施材料等级模式化，便可以详细表示构造物的形状和材料特性。到目前为止，有关多轴应力状态下混凝土本构律的研究已经获得了很大进展。然而，在此种材料等级中的基于模型化的构件或框架的分析中，需要许多计算时间和计算机存储容量，在用于反复出现诸多试行错误的结构设计时受到限制。因此，使用将每件构件的损伤分布予以模型化的构件模型和损伤部的应力 - 变形，对钢筋混凝土构造物进行非线性分析。

(1) 构件内的损伤分布

构件内的损伤分布依赖于构件内的应力分布和断面的开裂强度或屈服强度的分布。在地震力比较小的情形下，垂直荷载所产生的应力比较重要，在形成上端拉伸的构件端和从构件端进入内部的形成下端拉伸的广泛区域弯曲开裂会扩大，这些区域还会产生弯曲屈服铰链。但是，在损伤从构件内扩大的情形下，很难用简单的构件损伤分布模型表示其性能。在结构实验室的构件或框架的加力实验中，也和进行非线性结构分析时一样，在多数情况下忽略垂直荷载的影响，假定地震力所致的构件内的弯矩呈直线分布（图 2.2），在构件两端产生最大矩、构件中央产生弯矩反曲点的状态下加力，调查荷载 - 变形关系或破坏状况。尽管如此，构件内的损伤并非集中于构件端部，开裂是沿着构件轴分布的（图 3.1）。

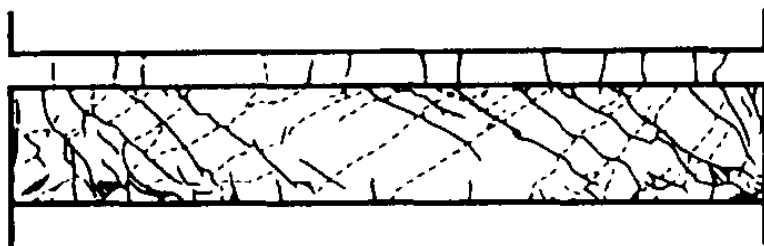


图 3.1: 受反复加力的梁的开裂

因此，进行钢筋混凝土构造物的非线性结构分析时，需要对构件内的、表示进展至构件内的损伤的刚性分布予以模型化。

(2) 构件的刚性矩阵

在非线性的构造物分析中，对于伴随构造构件损伤而产生的刚性变化，在荷载的微小增量范围内，假定构件的刚性呈线性能。因此，一旦产生新损伤便需要重新评价构件刚性，并需要重新制作刚性矩阵。

为了制作构件的刚性矩阵，去掉在构件内假定任意应力状态的单纯支撑构件 AB（图 3.2）。必须制作构件端的微小应力及变形的增量的关系。换言之，求出构件端的矩 m_A 、 m_B 及轴力和构件端旋转角 θ_A 、 θ_B 及轴方向变形的关系。如果以模块形式表示，构件的瞬间刚性矩阵可以书写为以下形式。

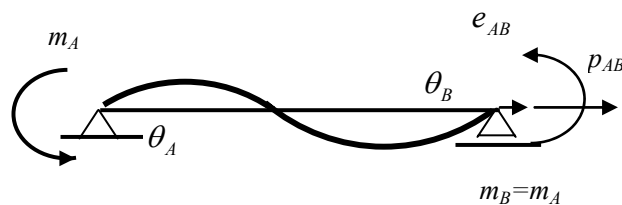


图 3.2: 构件端力和变形的关系

$$\begin{Bmatrix} \Delta p_{AB} \\ \Delta m_A \\ \Delta m_B \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta e_{AB} \\ \Delta \theta_A \\ \Delta \theta_B \end{Bmatrix}_i$$

在线性弹性的结构分析中，诸如柱和梁之类同样的长方形断面构件可以用通过其构件断面之重心位置的直线表示。原因在于，受弯矩的构件在线性弹性范围内时，断面重心位置成为中立轴，断面重心位置的应变为零。因此，即使弯矩沿构件起作用，也不会产生轴方向变形，构件端部在轴力作用下也不会产生旋转变形。换言之，在线性弹性的范围内，不存在轴方向和弯曲的相互作用，在上述构件刚性矩阵中，因素 k_{12} 、 k_{13} 、 k_{21} 、 k_{31} 皆为零。

但是，一旦弯矩导致钢筋混凝土构件产生弯曲开裂，断面的中立轴便会从断面的重心位置向压缩侧移动，开裂前的断面重心位置会因开裂而产生拉伸应变，断面重心位置会产生伸长变形（图 3.3）。这种伸长变形在构件实验中也可以观察到。因此，在构件刚性矩阵中，因素 k_{12} 、 k_{13} 、 k_{21} 、 k_{31} 不再为零。能够考虑这种轴方向和弯曲之相互作用的构件模型非常少。

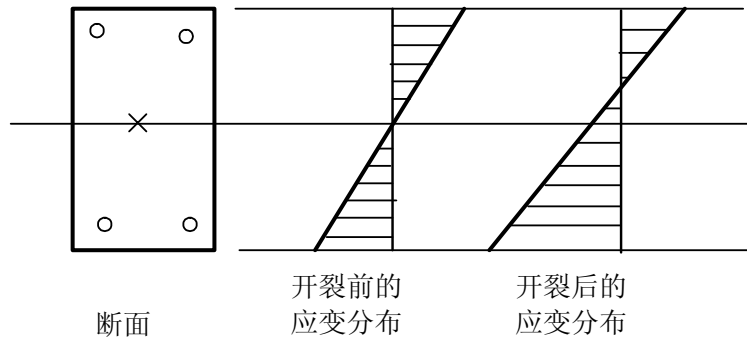


图 3.3：弯曲开裂导致的中立轴的移动

此外，即使忽略构件的轴方向变形的影响，构件端的矩 m_A 、 m_B 也是由两端的构件端旋转角 θ_A 、 θ_B 决定的。但是，在构件实验中，不能通过对构件端的旋转角 θ_A 、 θ_B 的组合进行各种变化来进行实验。通常较多的做法是，与两端旋转角相等这一条件（ $\theta_A = \theta_B$ ）相对，即在作为两端的矩（ $m_A = m_B$ ）的构件内的弯矩分布呈逆对称这一条件下，实施渐增施荷或反复施荷实验，调查构件端矩 m_A 和旋转角 θ_A 的关系（图 3.4）。

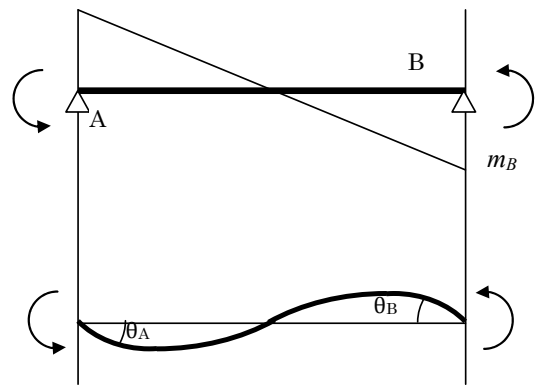


图 3.4：逆对称弯曲导致的构件端力 - 变形

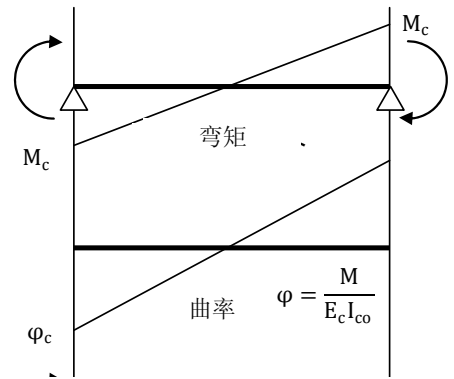
(3) 构件端部的弯矩—旋转角关系

根据弯曲理论，可以按照构件的矩确定曲率分布。一旦确定构件内的曲率分布，便可以用结构力学的单位荷载法（假想工作法）确定构件内的位移。例如，在同等大小的弯矩作用于被单纯支撑的梁构件的两端的情形下（构件内分布逆对称弯矩之情形），可以求算构件端达到弯曲开裂、弯曲屈服、极限时的构件端旋转角。在用单位荷载法求算构造物位移的情形下，只需把向求算位移的方向施加单位荷载时的弯矩 M 和作用于构造物的荷载所致的曲率 φ 的各个点的乘积，向整个构造物进行积分即可。

(a) 弯曲开裂

构件端部产生弯曲开裂之前显示弹性性能，曲率分布是用弯矩除以开裂前的等价断面的断面二次矩和混凝土的弹性系数而得的，所以曲率分布也呈直线（图 3.5）。

计算构件左端部的旋转角时，只需乘以在构件左端施加单位矩所得的弯矩和曲率，然后就构件长度予以积分即可。



(b) 弯曲屈服

由于考虑逆对称弯矩分布，所以弯矩呈现出构件中央具有反曲点的直线分布。在构件中央的反曲点至产生开裂矩的点之间，曲率和矩成比例，呈直线分布。但一旦构件端产生开裂，断面的中立轴便会向压缩侧移动，弯矩和曲率关系便会脱离初期的线性关系（图 3.6）。从开裂矩的点至构件端的曲率分布，也因弯矩和曲率的比例关系而通过构件中央的反曲点。

将构件端施加了单位矩时的弯矩和曲率分布的乘积予以积分时，手算比较麻烦，但可以写出简单的程序。

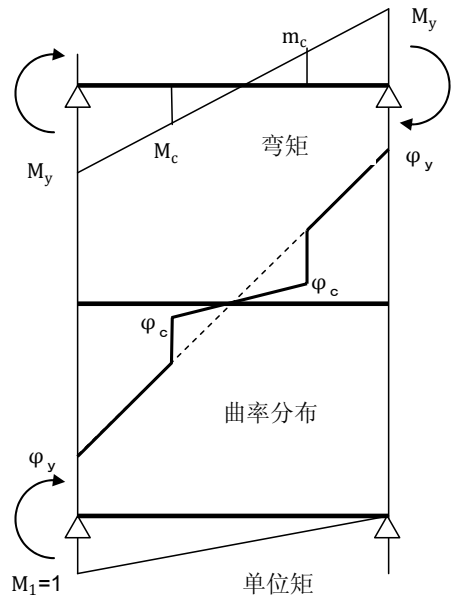


图 3.6: 弯曲屈服时的矩和曲率

(c) 极限

构件端的弯矩达到极限弯矩时，弯矩也呈逆对称直线分布，但曲率的分布稍显复杂。曲率因弯矩与开裂矩、屈服矩对应的点而变化，两端为极限时的曲率（图 3.7）。如果弯曲屈服的点靠近构件端，按曲率计算构件端选装角，则从屈服至极限之间的曲率的一部分不会有助于变形。但是根据构件实验，在极限时，屈服区域会在构件端至构件高度的 1/2 处至构件高度左右的范围扩展，即使在构件两端屈服之后，也会产生较大的塑性变形，显示出具有韧性的性能。

(d) 小结

根据弯曲理论，只要使用依照平面假设计算的断面的弯矩和曲率关系，便可计算构件端的弯曲旋转角。但是，如果将如此计算的构件端旋转角和实验得来的构件端旋转角作以比较，未必能很好对应。例如，众所周知，拉伸钢筋屈服时，与实验值相比，计算值成为极小的值。原因在于，进行弯曲分析时没有考虑构件内产生的剪断变形和钢筋与混凝土的粘着滑动等变形。

因此，在日本，对实验得来的构件端矩 - 旋转角的关系予以统计整理的实验式多被使用。例如，根据菅野（1970）的观点，与受逆对称弯曲施荷的构件的弹性刚性（ $= 6 E I / l$ ）相对的屈服时刚性的比（屈服时刚性降低率 α_y ）可以用如下式子表示（图 3.5）。

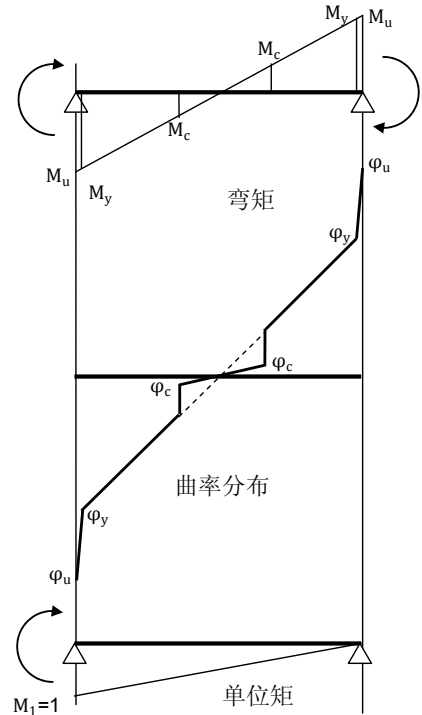


图 3.7：极限时的矩和曲率

$$\alpha_{ly} = (0.043 + 1.64 n p_t + 0.043 \frac{a}{D} + 0.33 \eta_0) (\frac{d}{D})^2$$

此处， n ：相对于混凝土的钢筋的弹性系数比（ $= E_s / E_c$ ）， p_t ：拉伸钢筋比（ $= a_t / b D$ ）、 a_t ：拉伸钢筋断面面积， b ：构件断面宽度， D ：构件总高度， a ：构件的剪断间距（构件长度的一半）， η_0 ：轴力比（ $= N / b D F_c$ ）， N ：轴力， F_c ：混凝土的压缩强度， d ：断面的有效高度（断面压缩缘至拉伸钢筋重心位置的距离）。

要确定钢筋拉伸屈服后的刚性是比较困难的。由于没有可以评价极限时变形的妥当方法，所以通常较多使用那些与弹性刚性相比、在数值计算中能够保持稳定的大小的值（例如 1/1000 左右）。

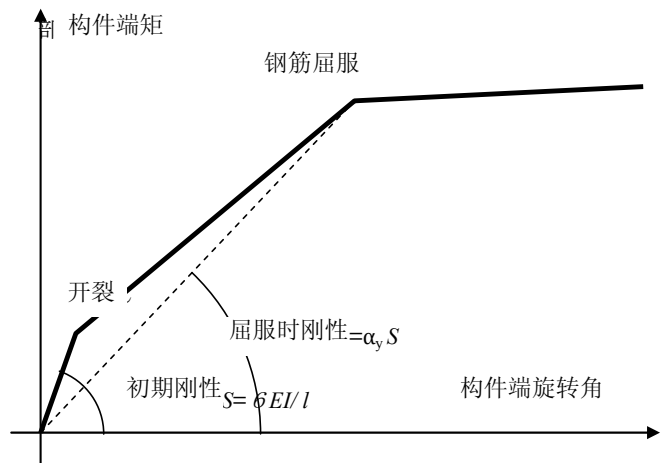


图 3.8：屈服点刚性降低率

参考文献

菅野俊介：《关于钢筋混凝土构件恢复力特性的研究、东京大学学位论文》1970 年 12 月。

Panagiotakos, T. and M. N. Fardis, "Deformation of R. C. Members at Yielding and Ultimate," *Structural Journal, American Concrete Institute, Vol. 98, No. 2, 2001, pp. 135-148.*

4. 钢筋混凝土的构件模型

接下来，在看框架的非线性分析的历史发展的同时，看一下旨在进行钢筋混凝土非线性分析的构件模型。

(1) 用材端完全塑性铰链进行的模型化

对构造物的渐增施荷进行非线性分析时（例如，Berg-DaDeppo、1960），曾在弹性分析方法中采用了这样一种方法，即构件端一旦达到屈服矩，便在该位置插入铰链，然后继续对增量施荷进行弹性分析。换言之，只能在构件内所有的塑性变形集中于塑性铰链，且构件断面一旦达到屈服矩便显示完全塑性性状的情形下操作，屈服后不能显示应变硬化。卸荷时，去掉铰链，继续作为弹性构件进行增量分析。

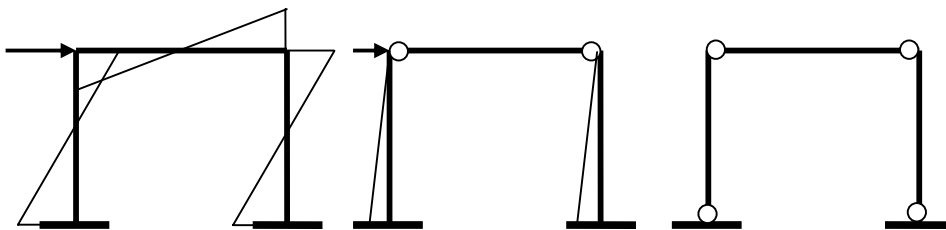


图 4.1：用材端铰链进行的分析

参考文献：

Berg, G. V., and D. A. DaDeppo, "Dynamic Analysis of Elasto-Plastic Structures," *Proceedings, Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 86, EM2, April 1960, pp. 35-58.*

(2) 用分割梁模型进行的应变硬化的模型化

为了思考构件端的屈服后的应变硬化，Clough 们（1965）提出了分割为连结两端的 2 个假设的并列要素的模型。其中，第 1 个要素是端部弯矩达到屈服矩时插入者，第 2 个要素是弹性。

即使构件屈服，分割要素的第 1 个要素屈服，弹性要素也会抵抗构件端矩。因此，可以显示出弯矩增大的应变硬化效果。如果端部矩在屈服后被卸

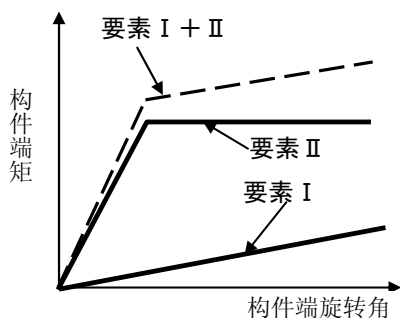


图 4.3：分割梁模型的荷载 - 变形

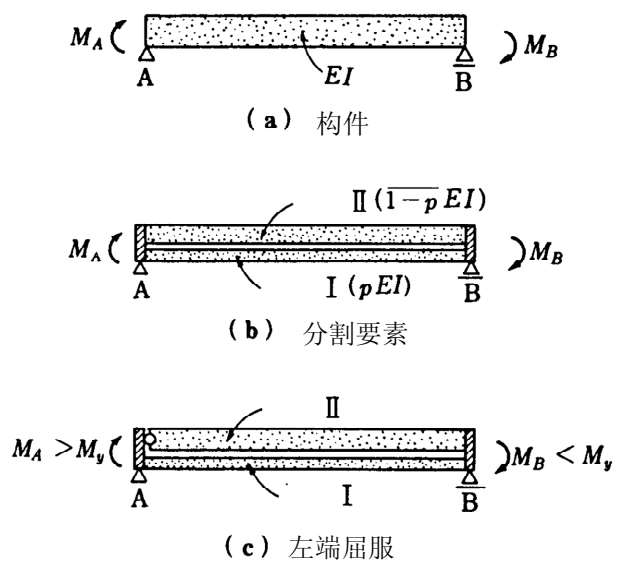


图 4.2：分割梁模型

荷，便会失去屈服要素的铰链，构件也会因初期弹性刚性而使端部矩减少。

关于该梁构件的刚性矩阵，可以在考虑分割要素的状况（即两端弹性、一端铰链加上他端铰链、以及两端铰链（图 4.4）这 3 中情形）后，对于各种状况下的构件，使构件端旋转角相等，全体构件的材端矩为各要素之要素端矩的和，然后通过重叠刚性而求得。

$$\begin{Bmatrix} \Delta m_A \\ \Delta m_B \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} (4p_1 + 3p_3) & 2p_1 \\ 2p_1 & (4p_1 + 3p_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_A \\ \Delta \theta_B \end{Bmatrix}$$

注：图 4.4 中请注意，不会同时存在“要素的左端有铰链，右端是作为弹性的要素（刚性 p_2EI ）”和“要素的右端有铰链，左端是作为弹性的要素（刚性 p_3EI ）”这两种情形。

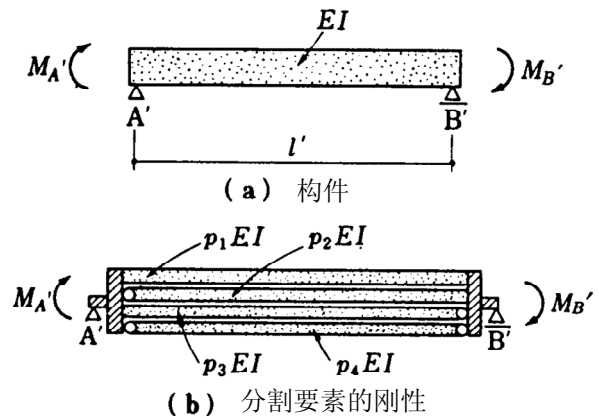


图 4.4：分割梁要素的状况

该模型的特点在于，构件端矩由两端的构件端旋转角决定，仅靠其端部的旋转角无法决定。但是，该模型的缺点在于，如果不改变分割的并列要素的刚性比例，便无法应对任意的迟滞模型(Giberson(1967))。

如果将 1 个构件分割为更多的并列要素，则可以在荷载 - 变形关系在多个折点发生变化的构件分析中使用。对于刚性因开裂或屈服而发生变化的钢筋混凝土构件，Aoyama—Sugano (1968) 提出了使用并列的 3 要素的模型。此外，还有人提出使组合要素的刚性跟随位移迟滞而变化、以应对任意迟滞模型的建议。(Takizawa, 1976)。

参考文献

Clough, Ray W., K. L. Benuska and E. L. Wilson, "Inelastic Earthquake response of tall buildings," *Proceedings, Third World Conference on Earthquake Engineering, New Zealand, Vol. II, Session II, 1965, pp. 68-89.*

Aoyama, Hiroyuki, and T. Sugano, "A Generalized Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Structures based on the Tests of Members," *Recent Researches of Structural Mechanics, Contribution in Honor of the 60-th Birthday of Professor Y. Tsuboi, 宇野书店, 1968, pp. 15-30.*

Takizawa, Haruo, "Notes on Some Basic Problems in Inelastic Analysis of Planar R/C Structures (Part I)," 《社团法人日本建筑学会论文报告集、社团法人日本建筑学会》No. 240, 1976 年 2 月, pp. 51-62.

(3) 材端刚塑性旋转弹簧模型

分割梁模型的缺点在于，无法应对表现任意材端矩和旋转角关系的迟滞模型。因此，Giberson (1967) 将构件中央部作为线性弹性，提出了在构件端使用刚塑性旋转弹簧的模型（材端刚塑性旋转弹簧模型）（图 4.5）。通过对材端刚塑性旋转弹簧模型和分割模型进行比较，指出材端刚性旋转弹簧模型具有可以应对各种迟滞模型的优点。

构件端部的旋转角，为线性弹性的中间部旋转角和端部旋转角之和。在线性弹性的要素和旋转弹簧中，构件端弯矩是相等的。因此，构件的刚性矩阵可以书写为：

$$\begin{Bmatrix} \Delta m_A \\ \Delta m_B \end{Bmatrix} = \frac{(6EI/L)}{(2+s_A)(2+s_B)-1} \begin{bmatrix} 2+s_B & 1 \\ 1 & 2+s_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_A \\ \Delta\theta_B \end{Bmatrix}$$

此处， EI ：线性弹性的中间部的弯曲刚性， L ：构件的长

度， k_A 、 k_B ：旋转弹簧的刚性 $s_A = \frac{6EI}{L k_A}$ 、 $s_B = \frac{6EI}{L k_B}$ 。

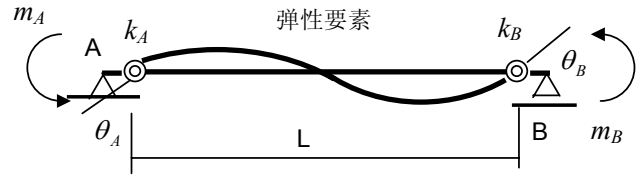
弹簧的刚性，可以通过在构件端假定妥当的屈服铰链长度，在该区域分布屈服曲率的方式计算。

该模型的最大缺点在于，构件端的塑性旋转角的大小的确定，与构件的弯矩分布没有关系。例如，构件中央具有反曲点的逆对称弯矩分布和他端的弯矩为零时，塑性区域的曲率分布不相同，因而构件端的旋转角也不同。在该模型中，不论构件内的弯矩分布如何，构件端的塑性旋转角仅以其构件端的矩决定。

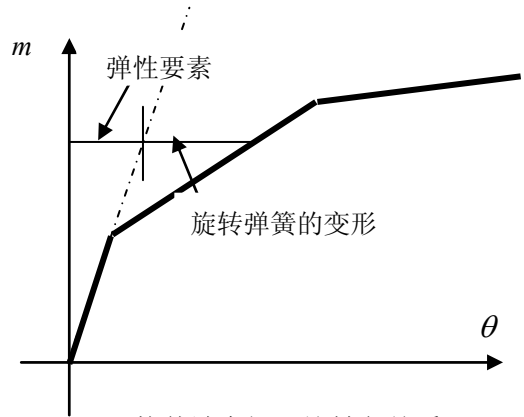
但是，该模式的优点在于，可以在构件端的旋转弹簧的迟滞模型中使用各种模型。

参考文献

Giberson, M. F., "The Response of Nonlinear Multi-story Structures subjected to Earthquake Excitation," EERL Report, Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, 1967.



构件端刚塑性旋转弹簧模型
图 4.5：构件端刚塑性旋转弹簧模型



构件端弯矩 - 旋转角关系

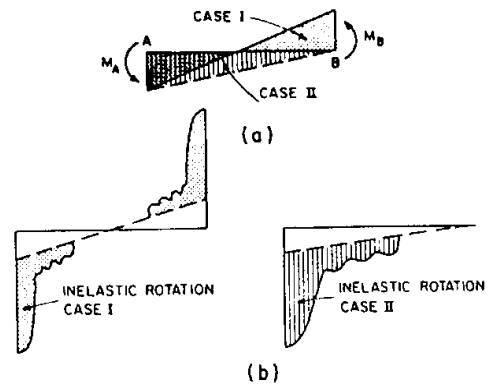


图 4.7：弯矩分布和旋转角

(4) 沿长度方向分割构件的模型

要表现刚性沿构件长度变化的情形，可以考虑在构件的各点配置弹塑性旋转弹簧，表现弹簧周边的弯曲旋转变形（图 4.8(a)），或者考虑分割为构件长度方向的短长度要素，使该要素的弯曲刚性随着弯矩的迟滞而变化（图 4.8(b)）。

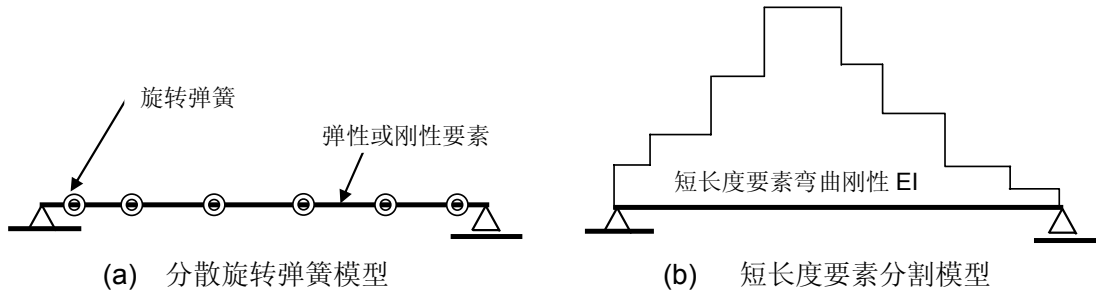


图 4.8：考虑沿构件之柔性分布的模型

将旋转弹簧分散配置于构件各点的模型，被 Wen—Janssen (1965) 用于平面框架的弹塑性分析中。假定构件的质量和变形集中于弹簧的位置。虽然假定弹簧和弹簧之间为刚性，但也可以假定弹性变形。Powell (1975) 建议，在塑性变形集中的区域以较短间隔配置旋转弹簧。如果从构件左端起，在距离 x_i 配置旋转弹簧（作为刚性逆数的柔性 f_i ），假定弹簧和弹簧之间为刚（图 4.9），则构件的柔性矩阵（刚性矩阵的逆矩阵）为：

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_A \\ \Delta\theta_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{AA} & f_{AB} \\ f_{BA} & f_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta m_A \\ \Delta m_B \end{Bmatrix}$$

此处，柔性矩阵的各要素为：

$$f_{AA} = \sum_i \left(1 - \frac{x_i}{L}\right)^2 f_i$$

$$f_{AB} = f_{BA} = \sum_i \left(\frac{x_i}{L}\right) \left(1 - \frac{x_i}{L}\right) f_i$$

$$f_{BB} = \sum_i \left(\frac{x_i}{L}\right)^2 f_i$$

计算刚性矩阵时，只需以逆矩阵方式计算柔性矩阵即可。

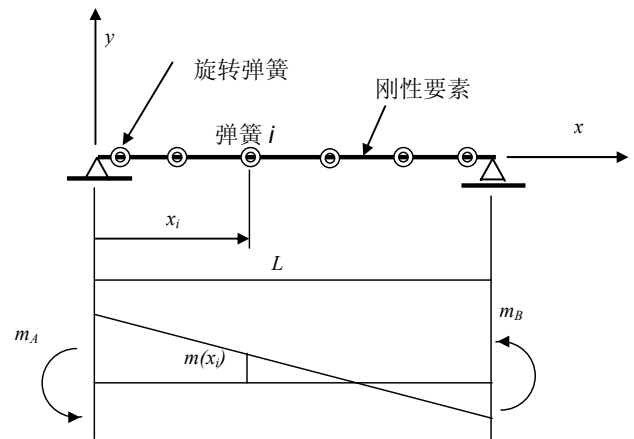


图 4.9：分散旋转弹簧模型

在沿长度方向将构件分割为短要素的模型中 (图 4.10), 各短要素的刚性矩阵只要使用切向弯曲刚性 EI_i 和要素长度 Δx_i (图 4.11), 便可求算作为线性弹性的要素的刚性矩阵。

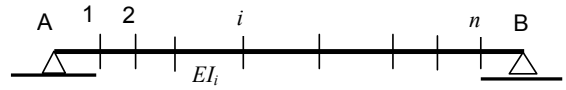


图 4.10：短长度要素分割模型

$$\begin{Bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \Delta d_1 \\ \Delta d_2 \end{Bmatrix}_i$$

如果将位于各要素和要素之接点的位移和外力作为自由度, 便可表示构件的刚性矩阵, 但位移的自由度变多。因此, 只要将位于内部节点的外力设为零, 实施静态缩减, 便可将位移自由度减至构件两端的旋转角。

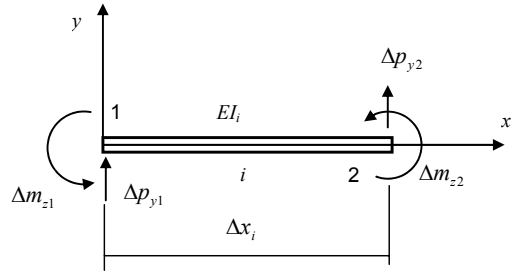


图 4.11：短长度要素的节点自由度

在考虑这些柔性分布的模型中, 随着荷载增量期间内部节点处产生的要素刚性的变化, 解除节点处产生的不平衡力。这属于细节问题, 此处不作探讨。

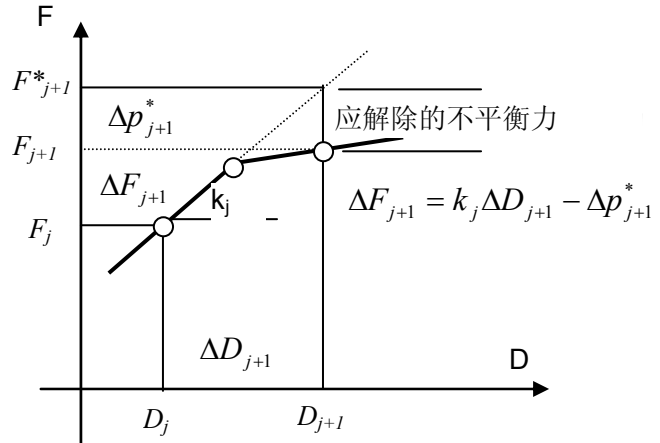


图 4.12：荷载增量中的刚性变化所产生的不平衡力

参考文献

Wen, R. K., and J. G. Janssen, "Dynamic Analysis of Elasto-Inelastic Frames," *Proceedings, Third World Conference on Earthquake Engineering, Wellington, New Zealand, January 1965, Vol. II, pp. 713-729.*

Powell, G. H., "Supplement to Computer Program DRAIN-2D, Supplement to Report, DRAIN-2D User's Guide, University of California, Berkeley, 1975.

(5) 连层抗震壁模型

抗震壁属于剪断变形较为卓越的构件, 但连层抗震壁如同梁构件一般, 弯曲变形的成分较大。在连层抗震壁中, 抗震壁的层和层之间很少产生地震时的弯矩的反曲点, 所以那些用于梁或柱之类框架构件的 (3) 构件端刚塑性旋转弹簧模型并不适合。虽然有时会使用那种以通过抗震壁断面中央的线材来表示的、沿长度方向分割 (4) 构件的模型, 但由于作用于连层抗震壁的弯矩的原因, 断面的拉伸侧会发生开裂, 高度方向会产生拉伸变形, 不适合表现伴随断面中立轴移动等的构件伸缩变形。

因此,如图 4.13 所示,使用了以 3 个垂直要素表示层和层之间情形的模型 (Otani, Kabeyasawa, Shiohara and Aoyama, 1985)。层之位置的梁为刚性。关于外侧的垂直要素,由于设于抗震壁的侧柱位置,且表示因壁的弯矩所导致的垂直位移,所以仅负担轴力。关于断面中央的垂直要素,具有考虑了弯曲、剪断、轴方向变形的旋转弹簧、水平弹簧、垂直弹簧。

对于轴方向的弹簧特性,则考虑因混凝土拉伸开裂所致的伸长、针对压缩力的较高刚性、以及针对反复轴力的迟滞特性。

在连层抗震壁中,会因下层弯曲开裂而导致纵方向的变形,所以垂直位移会随着向上部移动而变大,连接抗震壁之面内或面外的梁端部会向上方发生较大位移。在伴随该梁端之位移的剪断力的作用下,压缩力会作用于抗震壁,具有加大抗震壁之弯曲耐力的效果。

美国加利福尼亚大学的 Bertero-Vulcano (1987) 提出将抗震壁分割为短构件予以分析的方法。

参考文献

Otani, S., T. Kabeyasawa, H. Shiohara and H. Aoyama, "Analysis of the Full-scale Seven-story Reinforced Concrete Test Structure," ACI SP-84, Earthquake Effects on Reinforced Concrete Structure, US-Japan Research, American Concrete Institute, Detroit, 1985, pp. 203-239.

Vulcano, A., and V. V. Bertero, "Analytical Models for Predicting the Lateral Response of RC Shear Walls," University of California at Berkeley, Earthquake Engineering Research Center, Report No. EERC 87-19, 1987.

(6) 小结

此处介绍的模型化方法,是基于以节点位移为未知数、用节点的力的平衡条件编制整个构造物刚性矩阵的位移法原理的。最近,对构件的变形形状予以假定的应力法方法对该方法的特色之处进行了补充。若有兴趣,建议阅读以下参考文献。

参考文献

Kaba, S. and S. A. Mahin, "Refined Modeling of Reinforced Concrete Columns for Seismic Analysis," EERC Report 84/03, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 1984.

Zeris, C. and S. A. Mahin, "Analysis of Reinforced Concrete Beam-columns under uniaxial excitation, Journal, Structures Division, ASCE, Vol. 114, No. ST4, April 1988, pp. 804 - 820.

Zeris, C., and S. A. Mahin, "Behavior of Reinforced Concrete Structures subjected to Biaxial Excitation," Journal, Structures Division, ASCE, Vol. 117, No. ST9, September 1991, pp. 2657 - 2673.

Spacone, E., F. C. Filippou and F. F. Taucer, "Fiber Beam-column Model for Non-linear Analysis

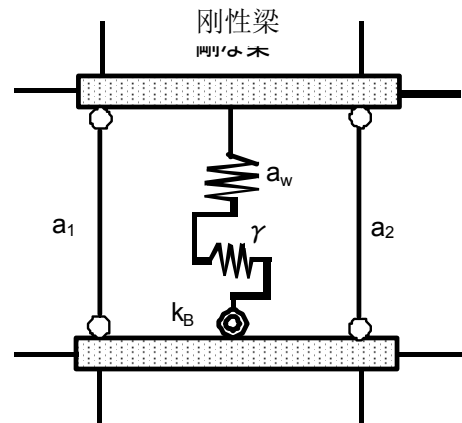


图 4.13: 连层抗震壁模型
(Kabeyasawa Model)

of R/C Frames: Part I. Formulation, ” Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 25, 1996, pp. 711 – 725.

Spacone, E., F. C. Filippou and F. F Taucer, “Fiber Beam-column Model for Non-linear Analysis of R/C Frames: Part II. Applications, ” Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 25, 1996, pp. 727 – 742.

Coleman, J., and E. Spacone, “Localization Issues in Force-based Frame Elements, ” Journal, Structural Engineering, ASCE, Vol. 127, No. 11, November 2001, pp. 1257 – 1265.

5. 钢筋混凝土构件的迟滞模型

在构造物的弹塑性分析中，对受损伤而刚性发生变化之部分的因反复荷载所致的应力 - 变形关系予以定义的迟滞模型是不可缺少的。该迟滞关系在构成断面的材料的应力度 - 应变关系、断面的弯矩 - 曲率关系、构件端的弯矩 - 旋转角关系、层的剪断力 - 层间变形关系、以及代表构造物的 1 自由度类的荷载 - 变形关系中，显示出不同的特性。作为构造物弹塑性分析时的单位，选定的模型不同，应当使用的迟滞模型也不同。迟滞模型必须对所有荷载迟滞提供荷载和变形的关系。关于所用材料及形状对应的试验体，必须能够表现出实验中观察到的特性。

通过渐增施荷而得到的荷载 - 变形关系，被称为恢复力特性或骨架曲线。在稳定的弯曲性能起支配作用的情形下，骨架曲线可以用荷载 - 变形关系的迟滞曲线的包络线表示。虽然恢复力特性必须通过构件的材料特性和断面的几何学特性来定义，但钢筋混凝土构件的恢复力特性通常是用混凝土的弯曲开裂点和因拉伸钢筋的弯曲屈服而刚性发生变化的 3 条直线 (Tri-linear 关系) 表示的。在钢筋混凝土结构中，混凝土容易因干燥收缩等原因发生开裂，所以有时忽略开裂前的状态，假设所有断面产生开裂，用仅考虑因拉伸钢筋之弯曲屈服所致之刚性变化的 2 条直线 (Bi-linear 关系) 来表示。

就技术现状而言，对钢筋混凝土构件的初期刚性、屈服变形、极限变形予以高精度评价的方法尚没有被提出来。尤其是结构设计中所用的初期刚性一旦考虑混凝土的杨氏系数偏差和因干燥收缩所致的开裂等，便难以评价。混凝土发生弯曲开裂之后，剪断开裂对整体变形的影响、主筋和混凝土的粘着应力度传递和滑动或反复加力所致的刚性降低等，使问题更为复杂。关于屈服变形及极限变形的评价，在当前现状下，对实验结果予以统计处理的实验式是不可欠缺的。

荷载变形关系的响应点可以用变形 D 和恢复力 F 来表示。

关于恢复力特性，可以用屈服点 Y 上刚性发生变化的二条直线所形成的关系或者开裂点 C 和屈服点 Y 上刚性发生变化的三条直线所形成的关系来表示。为表示荷载 - 变形的迟滞关系，使用施荷、卸荷、再施荷这三个用语 (图 5.1)；

施荷：荷载之值随着变形增大而变大的状态

卸荷：终止施荷或再施荷后，正的荷载下变形减少，负的荷载下变形增大，荷载绝对值变小的状态

再施荷：卸荷终止后荷载符号发生变化，或者卸荷途中荷载绝对值变大的状态。

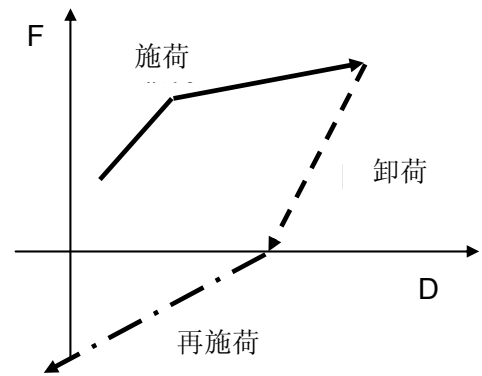


图 5.1：迟滞相关用语的定义

这是个反复将水平荷载作用于细长柱构件的实验，看一下钢筋混凝土构件的迟滞特性 (Otani - Cheung, 1981)。该构件中，虽然在弯曲开裂后产生了剪断开裂，但弯曲性能起支配作用。在第 3 循环中，可以观察到主筋的屈服 (图 5.2)。一般的迟滞性能可以概括如下：

(a) 表示荷载和变形之关系的刚性，因混凝土的弯曲开裂和主筋的拉伸屈服而大幅变化 (循环 1)。

(b) 一旦以新的最大位移反复加力，该位移的恢复力基本相同，但第 2 循环的刚性与第 1 循环相比明显降低（例如循环 3 和 4）。该种刚性降低，是第 1 循环发生新开裂和第 2 循环的钢筋的 Bauschinger 效果所致。

(c) 连结荷载—变形关系之顶点的平均刚性随着之前的最大变形而降低。例如，与赋予相同振幅的第 2 循环和第 5 循环的平均刚性相比，在赋予比第 2 循环更大位移后的第 5 循环中，平均刚性大幅降低。第 5 循环的平均刚性和在其之前的第 3 循环或第 4 循环的平均刚性大致相等。

(d) 钢筋混凝土的迟滞特性依赖于荷载迟滞。

(e) 在弯曲性能起支配作用的情形下，以相同位移进行反复时的耐力大致相等。

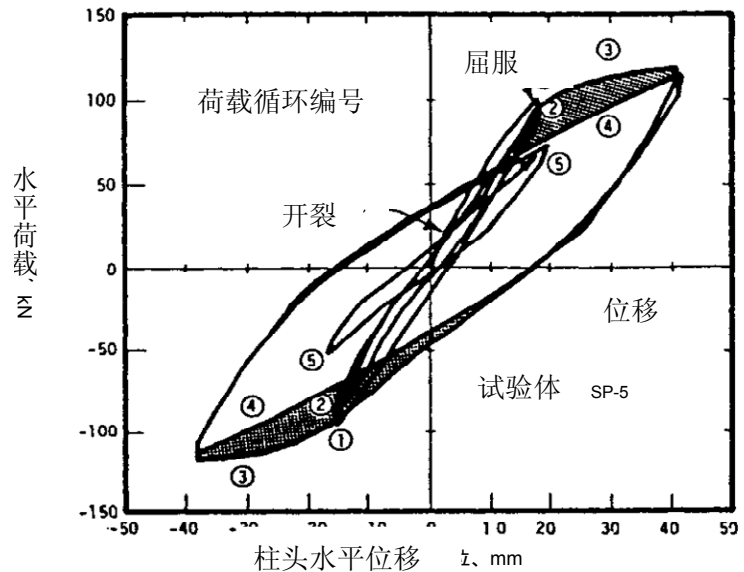


图 5.2：钢筋混凝土的荷载—变形关系

在弯曲性能起支配作用的情形下，钢筋混凝土构件的迟滞模型是以上述特性为代表的。恢复力特性和迟滞曲线的包络线大致相同。在技术现状下，无法评价耐力开始降低的极限位移。耐力降低后的迟滞性能在很大程度上依赖于局部破坏，不会显示出稳定的性能。此外，由于在实际设计中不容许最大耐力以后的性能，所以不能将该迟滞特性模型化。

在较大的反复剪断力作用于钢筋混凝土构件的情形下，或者在主筋和混凝土的粘着产生滑动的情形下，荷载变形关系显示出逆 S 状性能。在以下情形中也可以看到这种滑动性能（图 5.3）：

(a) 在弯曲性能起支配作用的构件中，危险断面的拉伸侧和压缩侧的主筋量差异很大的情形

(b) 因脱离主筋固定部位而导致较大变形的情形（Bertero-Popov, 1977）、

(c) 构件内，沿主筋产生粘着割裂开裂的情形。

这种逆 S 状性能因荷载迟滞及构件的结构特性而变化，所以很难构建一般的迟滞模型，亦难以分析的方式确定迟滞模型的参数。这种逆 S 状性能产生的迟滞耗能较小，所以在抗震设计中一般不希望出现这种性能，力求通过针对剪断或粘着的设计来防止这种性能的产生。

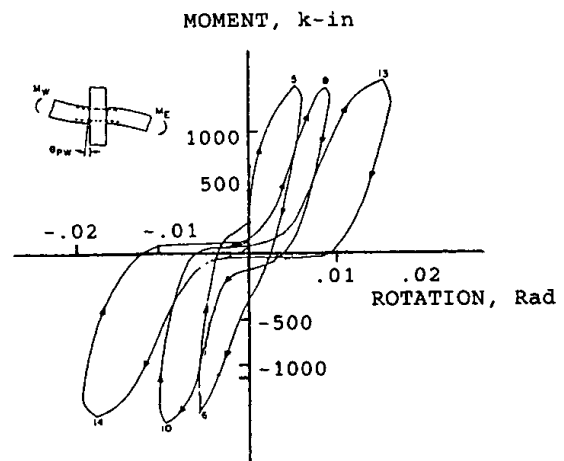
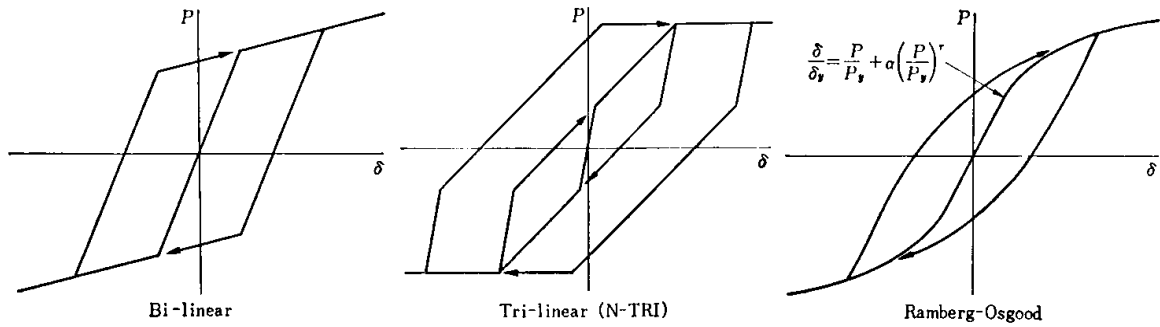


图 5.3：钢筋混凝土构件的滑动性能 (Bertero and Popov, 1977)

到目前为止，从复杂的模型至单纯之物，已经提出了许多迟滞模型。在复杂的迟滞模型中，由于许多分歧率被决定，所以计算机储存迟滞侧的容量变大了。但是，在反应分析中，即使有复杂的迟滞律，响应

的各个时刻也仅仅使用其中一部分，所以对运算时间的影响很小。

在卸荷和再施荷的情形下，将施荷时的恢复力特性以 2 倍方式予以使用的迟滞模型较多。这种迟滞模型一般被称为“Masing”型模型。例如以下模型。



Masing type hysteresis models

图 5.4: Masing-Type 迟滞模型示例

参考文献

Bertero, V. V., and E. P. Popov, "Seismic Behavior of Ductile Moment Resisting Reinforced Concrete Frames," ACI SP-53, American Concrete Institute, Detroit, 1977, pp. 247-291.

Otani, S., and V. W.-T. Cheung, "Behavior of Reinforced Concrete Columns Under Bi-axial Lateral Load Reversals - (II) Test without Axial Load," Publication 81-02, Department of Civil Engineering, University of Toronto, 1981.

Saatcioglu, M., "Modeling Hysteretic Force-Deformation Relationships for Reinforced Concrete Elements," ACI-SP127, American Concrete Institute, Detroit, 1991, pp. 153-198.

Comite Euro-International du Beton: RC Frames under Earthquake Loading, State of the Art Report, Thomas Telford, 1996.

(1) 完全弹塑性模型

恢复力特性以弹性和屈服后的完全塑性(屈服后,耐力不随变形而上升)的 2 条直线表示,屈服后一旦发生卸荷,以弹性刚性卸荷,则在达到对侧的屈服耐力之前显示弹性刚性。荷载的绝对值一旦达到屈服耐力,耐力便不会上升超过屈服耐力,仅有塑性变形在进行。

在非线形反应分析研究的初期状态下,许多研究人员使用完全弹塑性迟滞模型(初期弹性下,屈服后显示完全弹性的 Elasto-plastic model)。该荷载-变形关系是与实验结果比较显示的(图 5.5)。虽然因屈服后的卸荷而显示弹性刚性的迟滞模型比较简便,但谈不上表现了钢筋混凝土构件的迟滞特性。

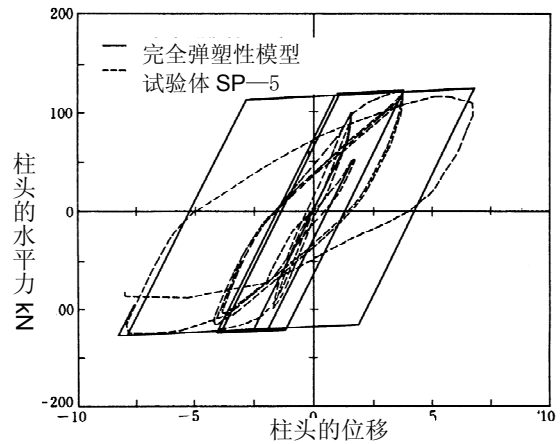


图 5.5: 完全弹塑性模型的性能

用弹性性能（第1折线）和因屈服后的应变硬化而导致耐力上升的2条直线表示恢复力特性的模型，被称为双线性模型。与反复荷载相对，响应点在到达通过屈服点的第2折线之前显示弹性性能，响应点一旦到达第2折线，便在第2折线上移动。发生卸荷时，响应点会在正负第2折线相夹的空间以弹性梯度（第1折线）显示性能，一旦达到第2折线，便在第2折线上移动。该模型不考虑因反复而导致的刚性降低，不会因屈服荷载以下的小反复而产生迟滞耗能。该迟滞模型也不能表现因钢筋混凝土构件屈服后的卸荷时刚性降低或反复而导致的刚性降低等迟滞特性，所以谈不上是合适的模型。

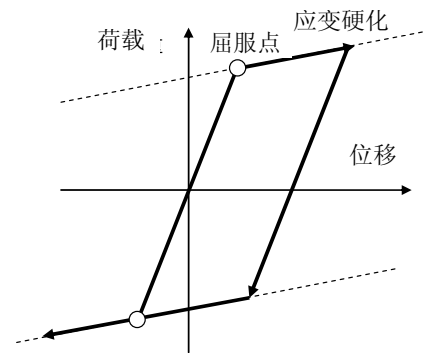


图 5.6：双线性模型

(2) 刚性降低型三折线模型

作为对显示弯曲性能的钢筋混凝土构件的迟滞特性予以表现的迟滞模型，有刚性降低型三折线模型（深田泰夫、1969）。恢复力特性是用因开裂和屈服而使刚性发生变化的3条直线表示的。虽然从开裂至屈服，用刚性变化的双线性模型显示开裂点的性能（图 5.7(a)），但一旦超过屈服点，便在表示屈服点应变硬化的第3折线上移动。如果卸荷从此处开始，便以卸荷开始点为新的屈服点，在对侧的屈服点之间，将第1折线和第2折线的刚性降低至初期和现在的连结正负屈服点的梯度之比，在新的屈服点之间以双线性模型显示性能（图 5.7(b)）。一旦达到正负新屈服点，响应点便在第3折线上移动。

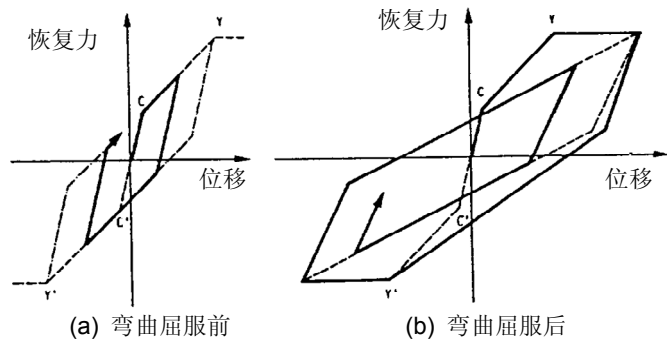


图 5.7：刚性降低型三折线模型

如果将该模型和弯曲性能卓越的钢筋混凝土构件的实验结果作以比较，便会发现不亚于完全塑性模型或双线性模型，对应得很好（图 5.8）。该模型的特点是：

- (a) 随着屈服后的变形增大，显示出刚性连续降低的性状；
- (b) 在紧接屈服之后的第1循环中，虽然迟滞耗能较大，但在接下来的循环中，迟滞耗能变小，变稳定。
- (c) 稳定的迟滞耗能和位移的大小成正比。

此处虽然用3条直线表示恢复力特性，但如果决定第1折线和第2折线，也可以使用任意形状的恢复力特性曲线。

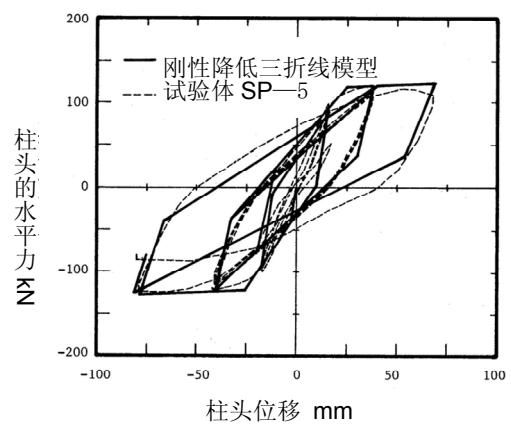


图 5.8：刚性降低型三折线模型

参考文献：

深田泰夫：《关于钢筋混凝土建筑恢复力特性的研究（其1）、日本建筑学会关东支部学术研究发表会梗概集》 pp. 121-124, 1969年11月。

(3) Clough Model

Clough-Johnston (1966) 提出的模型虽然用在屈服点改变刚性的2条直线表示与渐增施荷相对的恢复力特性，但表示了钢筋混凝土构件的迟滞特性。其特点为（图 5.9）：

(a) 施荷时，响应点在以2条直线表示恢复力特性的线上移动。

(b) 如果从屈服后的第2折线开始卸荷，则在应力符号变化之前，显示弹性刚性的性能。

(b.1) 再施荷后，一旦达到第2折线，便在第2折线上移动。

(b.2) 在卸荷时应力符号发生变化的再施荷中，响应点朝着符号发生变化的新方向的最大响应点（该方向不发生屈服的情形下，为屈服点）移动。

在简单的迟滞侧，很好地表现了钢筋混凝土的弯曲性能。（图 5.10）。

参考文献

Clough, R. W., and S. B. Johnston, "Effect of Stiffness Degradation on Earthquake Ductility Requirements," *Proceedings, Second Japan National Conference on Earthquake Engineering, 1966*, pp. 227-232.

Mahin, S. A., and V. V. Bertero, "Rate of Loading Effect on Uncracked and Repaired Reinforced Concrete Members," *EERC No. 73-6, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 1972.*

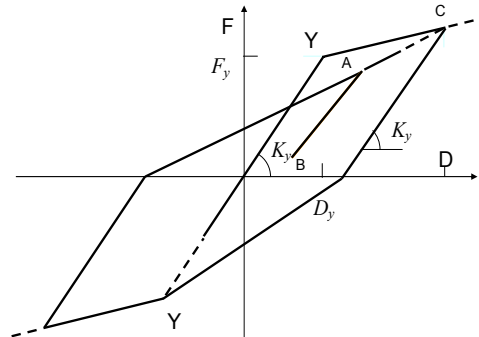


图 5.9 : Clough Model

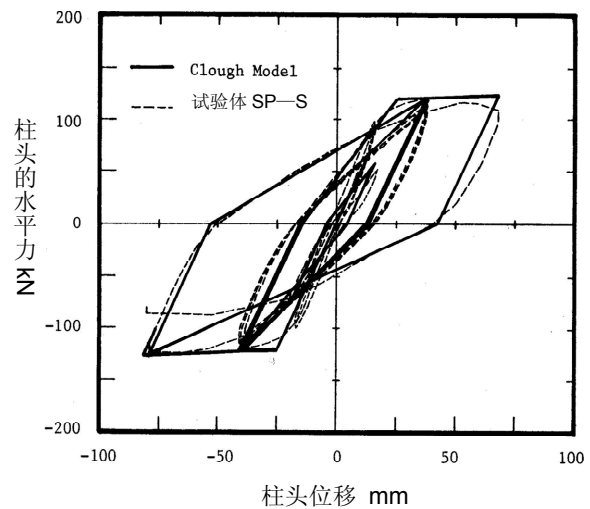


图 5.10 : Clough Model 和试验体的性能

(4) Takeda Model

Takeda 等（1970）以大量的中型钢筋混凝土构件实验结果（包括轴力等级较低者至中等程度者）为基础，提出了迟滞模型。

(a) 在初期施荷的情形下，响应点在骨架线上移动，该骨架线是用开裂点和屈服点处刚性发生变化的 3 条直线表示的。

(b) 超过开裂点 P_{cr} 后，从比屈服点 P_y 更近的点 P 开始卸荷时：

(b. 1) 在卸荷开始点和反侧未发生开裂的情形下，响应点在卸荷开始点和反侧开裂点 $-P_{cr}$ 之间移动。

(b. 2) 在卸荷开始点和反侧已经发生开裂的情形下，如果从卸荷开始点向反侧开裂点 $-P_{cr}$ 卸荷，荷载符号发生变化后开始再施荷，则响应点朝向其方向的最大响应点。

(c) 如果从超过屈服点 P_y 的第 3 直线上的点 P_m 开始卸荷，卸荷刚性 K_r 为：

$$K_r = \frac{f_c + f_y}{d_c + d_y} \left| \frac{d_m}{d_y} \right|^{-\alpha}$$

此处， f_c ：开裂点的耐力， f_y ：屈服点的耐力， d_c ：开裂点的位移， d_y ：屈服点的位移， d_m ：最大响应点 P_m 的位移， α ：除荷刚性低下指数。

(c. 1) 在卸荷开始点和反侧未发生开裂的情形下，响应点在卸荷开始点和卸荷刚性上的反侧开裂点的水平点之间移动。响应点一旦到达卸荷刚性上的反侧开裂点的水平点，便朝向其方向的屈服点。

(c. 2) 在卸荷开始点和反侧已经发生开裂但未发生屈服的情形下，响应点在卸荷开始点和应力因卸荷刚性而成为零的点之间移动。一旦到达应力因卸荷刚性成为零的点，且应力符号发生变化，则朝向其方向的屈服点。

(c. 3) 在卸荷开始点和反侧已经发生屈服的情形下，响应点在卸荷开始点和应力因卸荷刚性而成为零的点之间移动。一旦到达应力因卸荷刚性而成为零的点且应力符号发生变化，则朝向其方向的最大响应点。

(d) 在再施荷途中卸荷的情形下，如果因其循环

的外侧的卸荷刚性而卸荷，应力变为零，且应力符号发生变化，则朝向该循环的外侧的顶点。到达该顶点时，便朝向其外侧的循环的顶点。

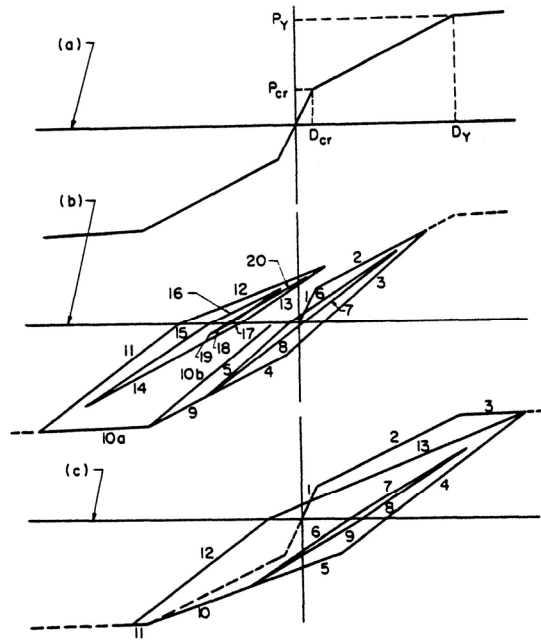


图 5.11 : Takeda Model (1)

一般认为，Takeda Model 非常详细地规定了迟滞律（Hysteresis Rule），很好地表现了钢筋混凝土构件的性能，但很难编制程序。但是，虽然程序较长，但运算过程中仅使用程序的极少一部分，所以几乎

不会影响反应分析的时间。

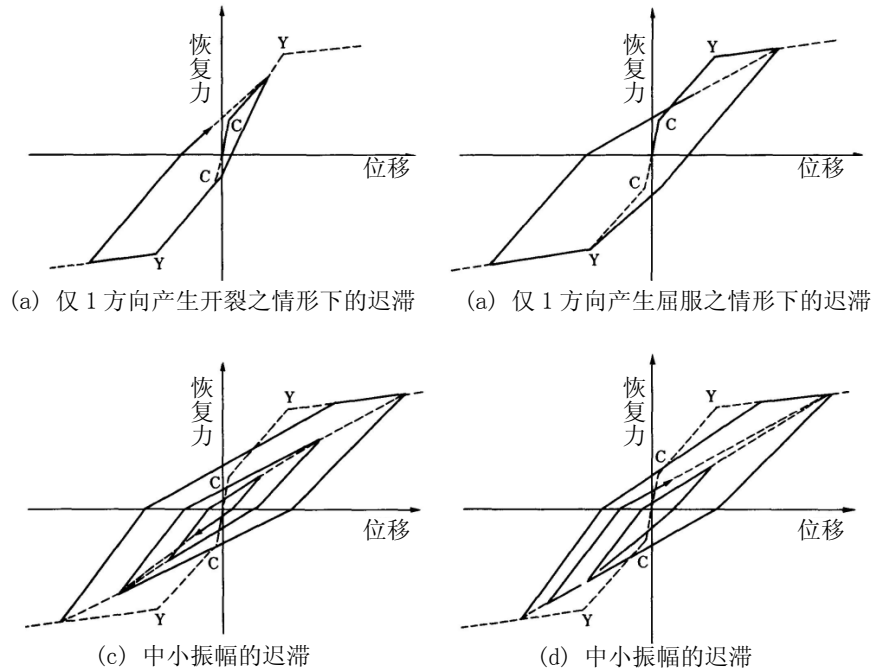


图 5.12: Takeda Model (2)

参考文献

Takeda, T., M. A. Sozen and N. N. Nielsen, "Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes," *Journal, Structural Division, ASCE, Vol. 96, No. ST12, 1970, pp. 2557-2573.*

(5) Pivot Model

在 Pivot Model 中，用荷载轴和弹性直线定义 4 个象限 Q_i (图 5.13)。渐增施荷时的荷载变形关系用 4 条直线表示。初期刚性在屈服点 Y 处刚性降低后，在点 T 达到强度，在点 D 之前出现耐力降低，其后，在点 F 处耐力为零。渐增施荷时的荷载—变形关系也可以正负不同。

对在正负弹性线上支配迟滞形状的 4 个 Pivot 点予以定义。即，在正侧弹性线延长线上拥有负侧屈服耐力 F_{y2} 之 α_2 倍耐力的 Pivot 点 P_4 ；在负侧弹性线上拥有和正侧 Pivot 点 P_4 相同耐力的 Pivot 点 P_3 ；在负侧弹性线延长线上拥有正侧屈服耐力 F_{y1} 之 α_1 倍耐力的 Pivot 点 P_2 ；在正侧弹性线上拥有和负侧 Pivot 点 P_2 相同耐力的 Pivot 点 P_1 。除此之外，在旨在定义滑动性能的负弹性线上，有 Pinching Pivot 点 PP_2 (耐力 $\beta_2^* F_{y2}$)，正弹性线上有 PP_4 (耐力 $\beta_1^* F_{y1}$)。这些 Pinching Pivot 点随着荷载迟滞而在弹性线上改变位置。

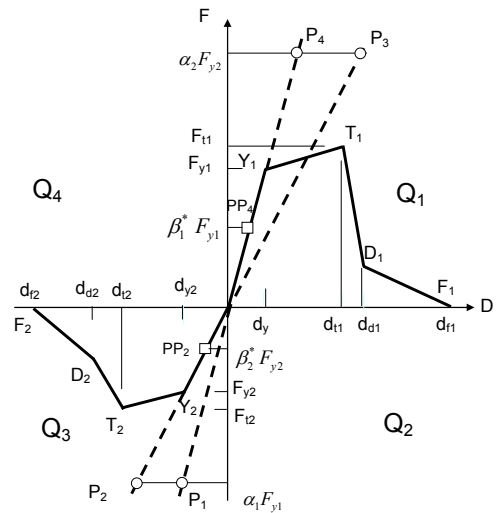


图 5.13: Pivot Model 的象限

其特性如下。

(a) 渐增施荷的情形下，在正负各自方向用 4 条直线定义的骨架曲线上移动。

(b) 对一旦在正负某一方向超过屈服点，便在骨架曲线上应对最大响应位移的最大响应点 S_1 、 S_2 予以定义。在初期阶段，最大响应点 S_1 、 S_2 为正负各自方向的屈服点 Y_1 、 Y_2 。

(c) 新的骨架曲线，对连接 PP_1 和 S_1 、 PP_2 和 S_2 者予以修正（图 5.14）。

(d) Pinching Pivot 点 PP_1 和 PP_2 在初期是固定的，但随着耐力的降低，在荷载—变形关系的弹性线上向原点方向移动。新的 Pinching Pivot 点 PP_1 和 PP_2 的耐力用 $\beta_i^* F_{yi}$ 定义，值为：

$$\beta_i^* = \beta_i \quad (d_{iMAX} \leq d_{ii})$$

$$\beta_i^* = \beta_i \frac{F_{iMAX}}{F_{ii}} \quad (d_{iMAX} > d_{ii})$$

此处， β_i ：表示耐力开始降低前的、具有韧性的弯曲构件的滑动性能的程度， d_{iMAX} 、 d_{ii} ：正负各自方向的最大响应位移和最大耐力点 T 的位移， $i=1$ 或 2 表示正负。

迟滞律如下所示（图 5.15）：

- (a) 象限 Q_n ($n=1$ 或 3) 的施荷朝向点 P_n ，卸荷向离开点 P_n 的方向移动。
- (b) 象限 Q_n ($n=2$ 或 4) 的施荷向 Pinching Pivot 点 PP_n 移动，达到 Pinching Pivot 点 PP_n 时，向骨架曲线上的最大响应点 S_i 移动，其后在骨架曲线上移动。
- (c) 象限 Q_n ($n=2$ 或 4) 的卸荷向离开 Pinching Pivot 点 PP_n 的方向移动。

参考文献

Dowell, R. K., F. Seible and E. L. Wilson, "Pivot Hysteresis Model for Reinforced Concrete Members," *ACI Structural Journal*, Title No. 95-S55, Vol. 95, No. 5, September-October 1998, pp. 607 - 617.

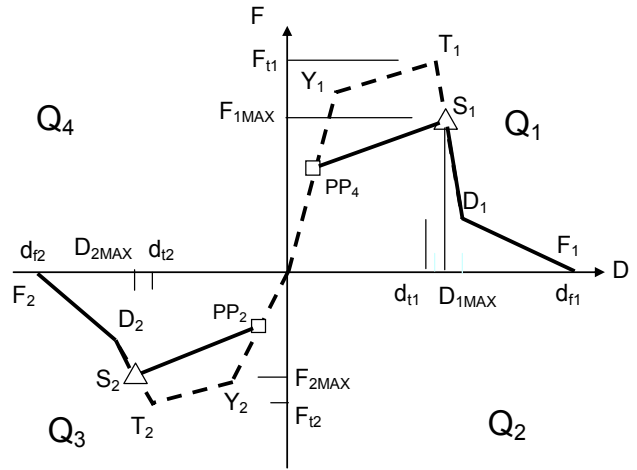


图 5.14: 最大响应点和骨架曲线

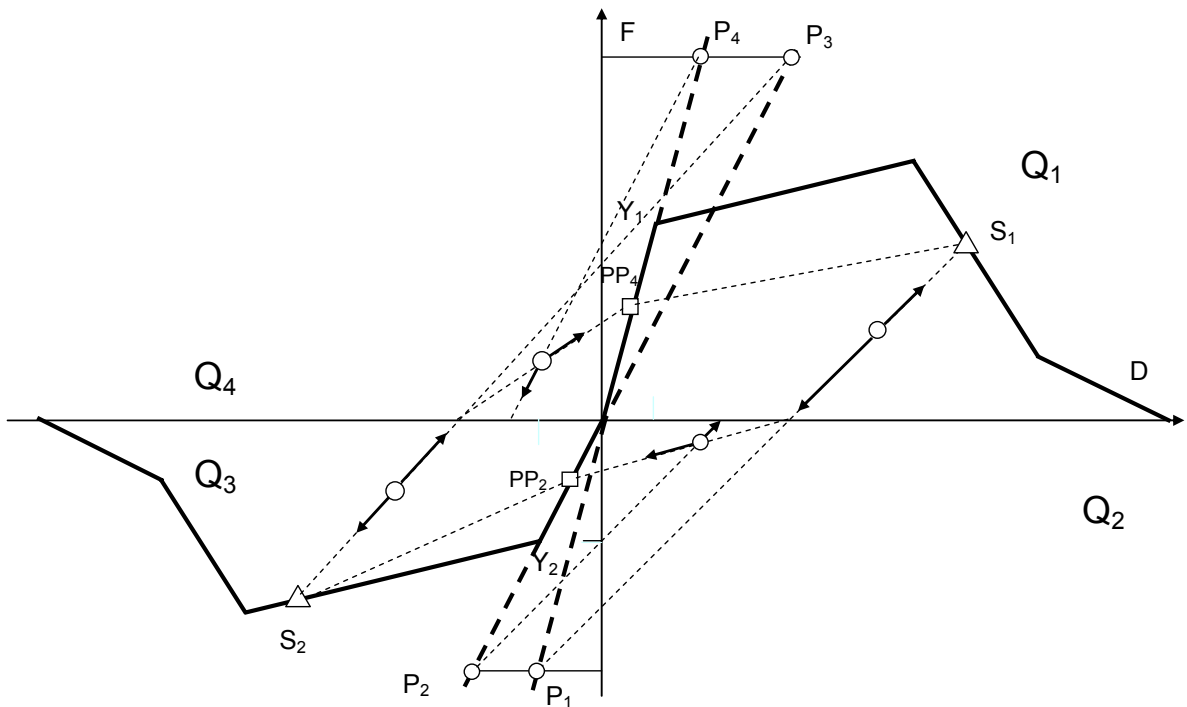


图 5.15: Pivot Model 的迟滞律

(6) 预应力混凝土构件的迟滞模型

预应力混凝土的弯曲强度大，多被用于大间距结构中。但是在梁构件中，垂直荷载对弯矩影响很大，需要确认能否使用在构件端部设定弯曲屈服的构件损伤模型。此外，由于受反复荷载时的迟滞耗能较小，所以与钢筋混凝土相比具有反应变大的缺点。以下介绍一例迟滞模型（林三雄等、1995）。

恢复力特性是用因混凝土的开裂及拉伸钢筋的屈服而刚性发生变化的 3 条直线表示的。对于弹性刚性，除弯曲刚性外还可以考虑剪断弹性刚性。在开裂矩的计算中，通过考虑轴力和有效预应力而确定。混凝土的拉伸强度是模仿钢筋混凝土结构的，为：

$$\sigma_t = 0.56\sqrt{\sigma_c}$$

屈服矩是通过考虑作用于断面的轴力和有效预应力而确定的，但压缩区域混凝土的应力度经常会超过线性弹性范围（压缩强度的 70%左右以下），对此应予注意。关于相对于弹性刚性的屈服点的割线刚度之比 α_y （屈服点刚性降低率），同钢筋混凝土构件之情形一样，使用菅野的实验式（菅野俊介、1970）。

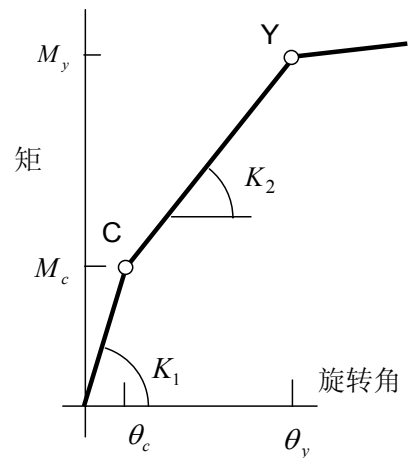


图 5.16 : 恢复力特性

$$\alpha_y = \frac{M_y}{K_1 \theta_y} = \left\{ 0.43 + 1.64n p_t + 0.043 \frac{a}{D} + 0.33 \frac{N}{b D \sigma_B} \right\} \left(\frac{d}{D} \right)^2$$

预应力混凝土构件的迟滞律如下所示。

迟滞律(1)：初期施荷中，在到达弯曲开裂点之前显示线性弹性性能。响应点在到达弯曲开裂点 $C(\theta_c, M_c)$ 之后，遵从迟滞律(2)。

迟滞律(2)：响应点在恢复力线上向屈服点 $Y(\theta_y, M_y)$ 移动。响应点在到达屈服点之后，遵从迟滞律(3)。如果在到达屈服点之前从最大响应点 $M(\theta_m, M_m)$ 卸荷，则遵从迟滞律(2.1)。

迟滞律(2.1)：从最大响应点 $M(\theta_m, M_m)$ 以卸荷刚性 K_D 向 D 点卸荷且再施荷时，响应点朝向点 M。此处，

$$K_A = \frac{M_m - M_A}{\theta_m - \theta_A}$$

$$K_B = \frac{M_m - M'_c}{\theta_m - \theta'_c}$$

$$K_D = \lambda' K_A + (1 - \lambda') K_B$$

点 D 为卸荷直线和直线 AB 的交点。响应点在因再施荷而到达点 M 之后，遵从迟滞律(2)。响应点一旦因卸荷而到达点 D，则遵从迟滞律(2.2)。

迟滞律(2.2)：如果卸荷和反侧未发生开裂，则遵从迟滞率(2.2.1)；如果发生开裂，则遵从迟滞律(2.2.2)。

迟滞律(2.2.1)：响应点在迟滞律(2.1)确定的点 D 和与再施荷方向的点 A' 的矩相等的点 E' 之间，呈线性移动。线段 DE' 的刚性 K_E 等于初期间性 K_I 。将点 E' 方向的最大响应点 M' 称为新的开裂点 C'，将卸荷刚性 K'_D 称为 K_1 。将点 D' 作为 A'，将其矩 M'_D 作为 M'_A 。响应点一旦到达点 E'，则遵从迟滞律(4)。

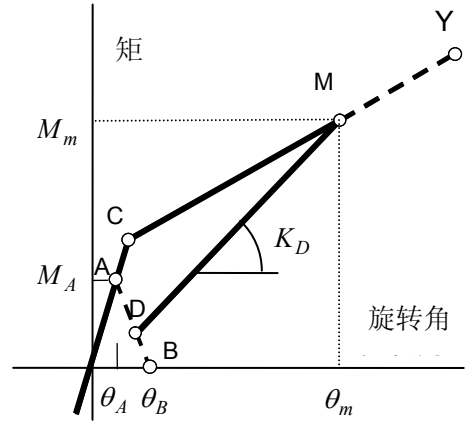


图 5.17：开裂后的卸荷

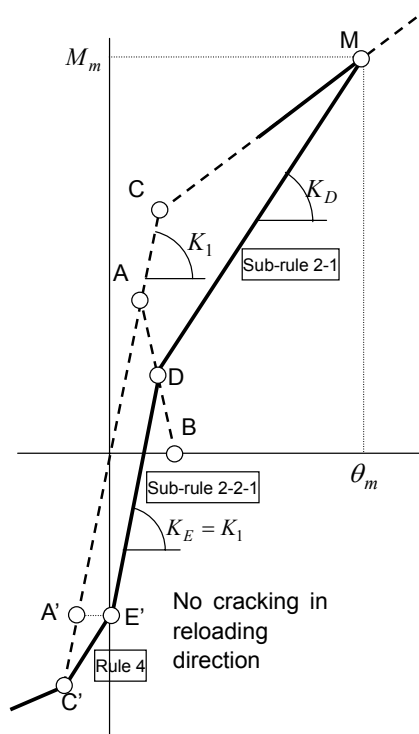


图 5.18：迟滞律(2.2.1)

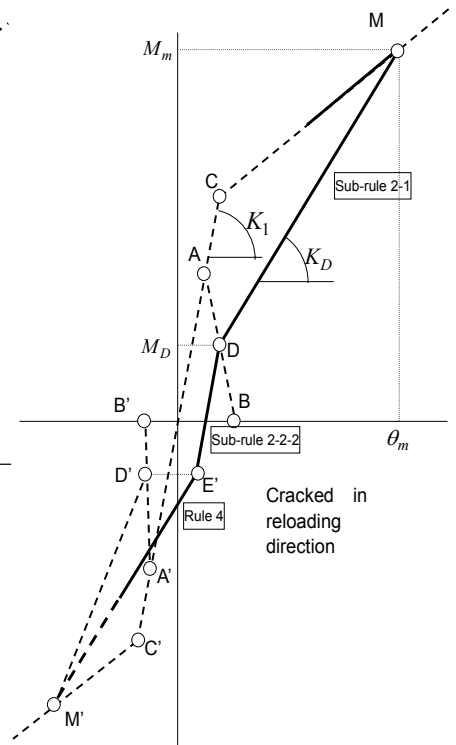


图 5.19：迟滞律(2.2.2)

迟滞律(2.2.2): 从迟滞律(2.1)的点 D (θ_D, M_D) 向与再施荷方向的点 D' 的矩相等的点 E' 移动。卸荷刚性 K_E 等于初期刚性 K_1 。点 D' 和其矩 M'_D 是在迟滞律(2.1)或迟滞律(3.1)中从 M' (θ'_m, M'_m) 卸荷之时定义的。

响应点一旦经再施荷而到达点 D, 则遵从迟滞律(2.1), 朝向最大响应点 M (θ_m, M_m)。

一旦响应点的矩符号发生变化, 到达点 E', 则响应点遵从迟滞律(4)。

迟滞律(3): 响应点在恢复力曲线的第3折线上以刚性 K_3 移动。如果从最大响应点 M (θ_m, M_m) 卸荷, 则遵从迟滞律(3.1)。

迟滞律(3.1): 响应点以卸荷刚性 K_D 卸荷。

$$K_A = \frac{M_y - M_A}{\theta_y - \theta_A} \left(\frac{\theta_m}{\theta_y}\right)^{-\gamma}$$

$$K_B = \frac{M_y - M'_c}{\theta_y - \theta'_c} \left(\frac{\theta_m}{\theta_y}\right)^{-\gamma}$$

$$K_D = \lambda' K_A + (1 - \lambda') K_B$$

此处, 屈服点 Y (θ_y, M_y) 在最大响应点 M (θ_m, M_m) 一侧, 开裂点 C' (θ'_c, M'_c) 在符号的反侧。点 D 是卸荷直线和线段 AB 的交点, 该点的矩为:

$$M_D = M_A \frac{\theta_m - \theta_B - \frac{M_m}{K_D}}{\theta_A - \theta_B - \frac{M_A}{K_D}}$$

响应点一旦到达已经开始卸荷的最大响应点 M, 则在恢复力特性线上遵从施荷的迟滞律(3)。

如果响应点到达卸荷线上的点 D (θ_D, M_D), 则遵从迟滞律(3.2)。

迟滞律(3.2): 在再施荷方向未发生开裂的情形下, 遵从迟滞律(3.2.1)。在再施荷方向发生开裂的情形下, 遵从迟滞律(3.2.2)。

迟滞律(3.2.1): 响应点以卸荷刚性 K_E 在线段 DE' 上移动。

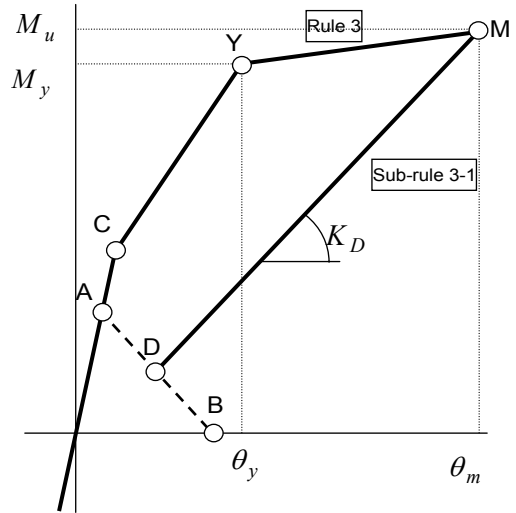


图 5.20: 迟滞律(3)和(3.1)

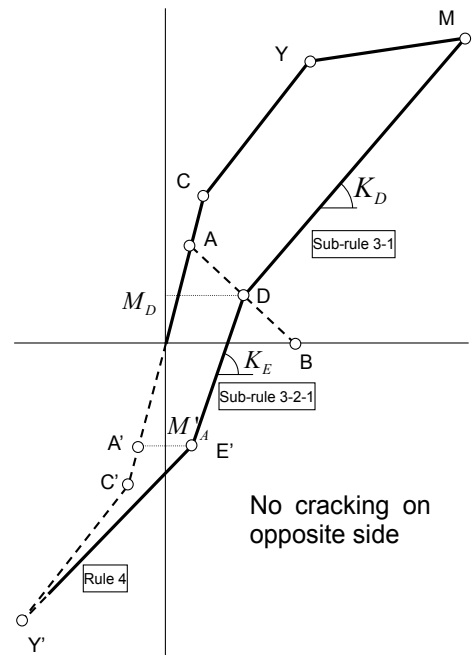


图 5.21: 迟滞律(3.1)至迟滞律(3.2.1)

$$K'_1 = K_1 \left(\frac{\theta_m}{\theta_y} \right)^{-\gamma}$$

$$K_B = \frac{M_y - M'_c}{\theta_y - \theta'_c} \left(\frac{\theta_m}{\theta_y} \right)^{-\gamma}$$

$$K_E = \lambda' K'_1 + (1 - \lambda') K_B$$

点 E' 成为卸荷线上矩值与初期施荷线上的点 A' 的值相等的 M'_A 。将点 E' 和同侧最大响应点 M' 作为屈服点 Y'，将从屈服点开始的卸荷刚性 K'_D 作为：

$$K_A = \frac{M'_y - M'_A}{\theta'_y - \theta'_A}$$

$$K_B = \frac{M'_y - M'_c}{\theta'_y - \theta'_c}$$

$$K_D = \lambda' K_A + (1 - \lambda') K_B$$

点 D 为卸荷线 MD 和线段 AB 的交点，其矩 M_D 为：

$$M_D = M_A \frac{\theta_y - \theta_B - \frac{M_y}{K_D}}{\theta_A - \theta_B - \frac{M_A}{K_D}}$$

响应点一旦在相同方向经再施荷而到达点 D，则遵从迟滞律 (3.1)。

响应点一旦到达反侧的点 E'，则遵从迟滞律 (4)。

迟滞律 (3.2.2)：响应点以卸荷刚性 K_E 在线段 DE' 上移动。卸荷刚性 K_E 为：

$$K'_1 = K_1 \left(\frac{\theta_m}{\theta_y} \right)^{-\gamma}$$

$$K_B = \frac{M_y - M'_c}{\theta_y - \theta'_c} \left(\frac{\theta_m}{\theta_y} \right)^{-\gamma}$$

$$K_E = \lambda' K'_1 + (1 - \lambda') K_B$$

点 E' 是卸荷线上与点 D' 的矩 M'_D 相等的点。点 D' 及其矩 M'_D ，是从恢复力曲线状的最大响应点 M' 通过迟滞律 (2.1) 或 (3.1) 定义的。

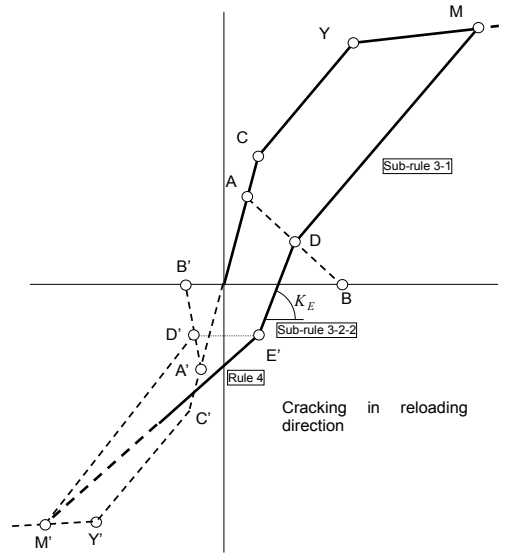


图 5.22：迟滞律(3.2.2)

响应点一旦经原来方向的再施荷而到达点 D，则遵从迟滞律(3.1)。

响应点一旦荷载符号发生变化且到达点 E'，则遵从迟滞律(4)。

迟滞律(4)：响应点在线段 E' M' 上向再施荷方向的最大响应点 M' (θ'_m, M'_m) 移动。点 E' 根据迟滞律(2.2)或(3.2)定义。

响应点一旦到达再施荷方向的最大响应点 M'，若该方向未产生屈服则遵从迟滞律(2)，若产生屈服则遵从迟滞律(3)。

如果在到达最大响应点 M' 之前从点 N' 开始卸荷，则响应点遵从迟滞律(4.1)。

迟滞律(4.1)：响应点从卸荷开始点 N 起，以卸荷刚性 K'_D 在线段 N' F' 上移动。点 F' 是卸荷线上与点 D' 之矩相等的点。卸荷刚性 K'_D 、点 D' 及其矩 M'_D ，从恢复力线上的最大响应点 M' (θ'_m, M'_m) 起，以卸荷的迟滞律(2.1)或(3.1)确定。

响应点一旦到达 N'，则反应遵从迟滞律(4)。

响应点一旦因卸荷而到达点 N'，则反应遵从迟滞律(4.2)。

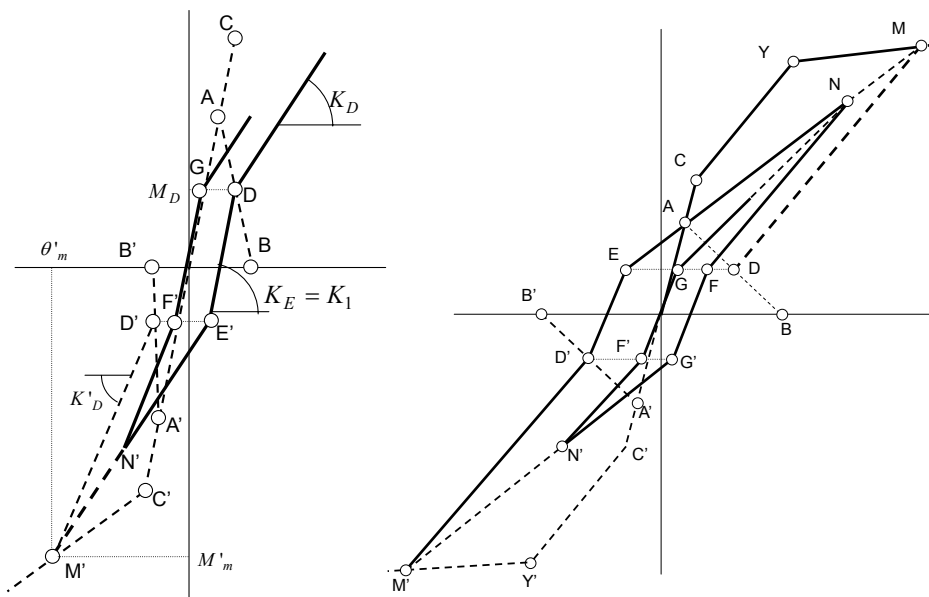


图 5.23 : 迟滞律(4.1)

迟滞律(4.2)：响应点以卸荷刚性（再施荷刚性） K'_E 在线段 $F'G$ 上移动。点 F' 根据迟滞律(4.1)定义。确定点 G 时，使其在卸荷线上和点 D 的矩相等。卸荷刚性 K'_E 是根据卸荷侧的最大响应点的状态确定的。

(a) 如果卸荷开始的一侧未发生屈服，则卸荷刚性 K'_E 等于初期弹性刚性 K_1 。

(b) 如果卸荷开始的一侧发生屈服，则卸荷刚性按以下方法确定：

$$K'_1 = K_1 \left(\frac{\theta_m}{\theta_y} \right)^{-\gamma}$$

$$K_B = \frac{M'_y - M_c}{\theta'_y - \theta_c} \left(\frac{\theta'_m}{\theta'_y} \right)^{-\gamma}$$

$$K'_E = \lambda' K'_1 + (1 - \lambda') K_B$$

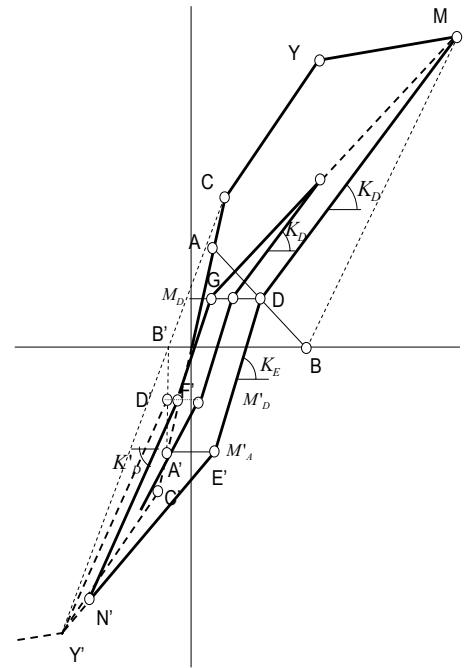


图 5.24：迟滞律(4.2)

响应点一旦到达点 G ，则反应遵从迟滞律(4)。

反应一旦因卸荷而到达 F' ，则反应根据迟滞律(4.1)朝向点 N' 。

谨作以上较为详细的介绍。

参考文献

林三雄、冈本伸、小谷俊介、加藤博人、傅金华：《PC 构件的迟滞特性和 PC 建筑的地震反应性状、预应力混凝土 Vol. 37、No. 4》1995 年 7 月，pp. 57-67。

菅野俊介：《关于钢筋混凝土构件恢复力特性的研究，东京大学学位论文》1970 年 12 月。

Takeda, T., M. A. Sozen and N. N. Nielsen, "Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes," *Journal, Structural Division, ASCE, Vol. 96, No. ST12, 1970, pp. 2557-2573.*

(7) 小结

此处介绍了对弯曲性能卓越的钢筋混凝土构件受反复加力之情形下的荷载 - 变形关系予以表现的迟滞模型。正如本文最初所述，设计阶段会阻止滑动性能和使耐力降低的剪断破坏或粘着滑动等性能的出现，所以没有必要介绍表现此类性能的迟滞模型。如对表现此类性能的迟滞模型表示关心，请参考以下文献。

此外，由于实验负责人可以将实验中观察到的构件性能模式化，所以实际中已经提出了许多迟滞模型。

参考文献

松岛丰：《关于构造物恢复力特性的考察——从十胜冲地震的灾害谈起，日本建筑学会大会学术讲演梗概集》1969 年 8 月，pp. 587-588。

Takayanagi, T., and W. C. Schnobrich, "Computed Behavior of Reinforced concrete Coupled Shear

Walls, " Structural Research Series No. 434, Civil Engineering Studies, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1976.

Banon, H., J. M. Biggs and H. Max Irvine, "Seismic Damage in Reinforced Concrete Frames," Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 107, No. ST9, September 1981, pp. 1713-1729.

Kabeyasawa, T., H. Shiohara, S. Otani and H. Aoyama, "Analysis of the Full-scale Seven-story Reinforced Concrete Test Structure," Journal of the Faculty of Engineering, the University of Tokyo, (B), Vol. XXXVII, No. 2, 1983, pp. 431-478.

Kato, D., S. Otani, H. Katsumata and H. Aoyama, "Effect of Wall Base Rotation Behavior of Reinforced Concrete Frame-Wall Building," Proceedings, Third South Pacific Regional Conference on Earthquake Engineering, Victoria University of Wellington, New Zealand, May 1983.

Costa, A. C., and A. G. Costa, "Hysteretic Model of Force-Displacement Relationships for Seismic Analysis of Structures," National Laboratory for Civil Engineering, Lisbon, 1987.

Chung, Y. S., et al., "Seismic Damage Assessment of Reinforced Concrete Members," National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York, Buffalo, Technical Report NCEER-87-0022, 1987.

Park, Y. J., et al., "IDARC: Inelastic Damage Analysis of Reinforced Concrete Frame-Shear Wall Structures," National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, Technical Report NCEER-87-0008, 1987.

Roufaiel, M. S. L., and C. Meyer, "Analytical Modeling of Hysteretic Behavior of R/C Frames," Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 113, No. 3, March 1987, pp. 429-444.